



TITLE:

水資源システムにおける確率論的 モデルと手法の評価に関する研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

寶, 馨

CITATION:

寶, 馨. 水資源システムにおける確率論的モデルと手法の評価に関する研究. 京都大学, 1990, 工学博士

ISSUE DATE:

1990-01-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r7072>

RIGHT:

水資源システムにおける
確率論的モデルと手法の評価に関する研究

平成元年 9月

寶

馨

水資源システムにおける
確率論的モデルと手法の評価に関する研究

平成元年 9月

寶

馨

水資源システムにおける 確率論的モデルと手法の評価に関する研究

本論文は3編からなり、その構成は以下のようである。

序 論

第1編 水文頻度解析におけるモデルと手法の評価

第2編 洪水流出予測の確率過程的モデルと手法に関する研究

第3編 利水用貯水池システムの信頼性評価に関する研究

結 論

目 次

序 論	1
1 水文学・水資源工学・水資源システム	3
2 確率論的アプローチとシステム分析	4
2.1 水文統計	4
2.2 システム分析とシステム工学的手法の導入	4
3 stochastic について	5
3.1 deterministic と stochastic	5
3.2 random, probabilistic, statistical と stochastic	6
4 本論文の構成	7

1 概説 — 水文頻度解析の意義とその問題点	13
1.1 水文頻度解析	13
1.2 超過・非超過確率とリターンビリオド	14
1.3 水文頻度解析モデル	14
1.4 母数推定法	15
1.5 図式推定法(確率紙)による確率分布のあてはめ	16
1.5.1 プロットイング・ポジション	16
1.5.2 平分線の線引きの客観化 — 最小二乗法	17
1.5.3 確率分布モデルの適合性の評価規準	18
1.6 琵琶湖流域水文データへの適用	18
1.6.1 対象とする確率分布モデル	19
1.6.2 図式推定法による適合度の評価	20
1.6.3 図式推定法と最尤法の比較 — 極値降水量を例として	20
1.6.4 降水量および流入量の確率分布	23
1.7 適合性の指標としての SLSC の有用性	28
1.8 図式推定法による確率分布モデルのあてはめの手順のまとめ	28
1.9 結語	29
2 水文頻度解析モデルの母数推定法の評価	33
2.1 Monte Carlo シミュレーションによる母数推定法の評価	33
2.2 3 母数対数正規分布への適用	35
2.2.1 3 母数対数正規分布	35
2.2.2 3 母数対数正規分布の母数推定法	36
2.2.3 結果と考察	42
2.3 Gumbel 分布への適用	47
2.3.1 Gumbel 分布	47
2.3.2 Gumbel 分布の母数推定法	49
2.3.3 結果と考察	51
2.4 一般化極値分布への適用	53
2.4.1 一般化極値分布	53
2.4.2 一般化極値分布の母数推定法	54
2.4.3 結果と考察	55
2.5 結語	55

3	水文頻度解析モデルの評価	61
3.1	従来のモデル評価の手順とその問題点	61
3.2	適合度の評価	63
3.2.1	目視による適合度評価	63
3.2.2	適合度評価の客観的規準	63
3.2.3	適合度のみによる評価の問題点	66
3.3	確率水文量の変動性を規準としたモデル評価の手順	66
3.3.1	jackknife 法と bootstrap 法の概説	68
3.3.2	モデル評価へのリサンプリング手法の適用	69
3.4	降水量の極値データへの適用	69
3.4.1	大阪の年最大日降水量の場合	69
3.4.2	琵琶湖流域の年最大 m 日降水量の場合	70
3.4.3	まとめ	74
3.5	河川流量の極値データへの適用	79
3.5.1	St. Marys 川の年最大日流量	79
3.5.2	Ganga 川の年最大ピーク流量	80
3.5.3	まとめ	83
3.6	データ個数と確率水文量の推定精度	83
3.7	結 語	85

1 概説 — 流出モデル同定・評価の基本的考え方	89
1.1 流出システム	89
1.2 流出システムのモデル化の手順	89
1.3 流出モデルの分類	92
1.4 モデル構造の決定とモデル評価	93
2 確率過程的観点からの流出モデルの評価手法	95
2.1 洪水流出モデルの分類	95
2.2 モデル評価問題が未解決である理由	96
2.3 モデル評価の方針	96
2.4 確率過程的観点からの評価法	98
2.5 斜面流出系の表面流モデルの評価	99
2.5.1 kinematic wave モデルとその無次元化	100
2.5.2 貯留関数モデル	100
2.5.3 斜面流出シミュレーション	102
2.5.4 kinematic wave モデルの確率変換特性	102
2.5.5 貯留関数モデルの確率過程的評価	106
2.6 斜面+河道系の表面流モデルの評価	106
2.6.1 想定する流域の概要	106
2.6.2 想定する降雨パターン	109
2.6.3 斜面流出系モデル	109
2.6.4 河道流出モデル	109
2.6.5 斜面+河道系における確率変換特性	110
2.6.6 斜面系の簡略化について	110
2.6.7 流量算定時間間隔と降雨継続時間について	112
2.7 斜面流出系の表面流・中間流モデルの比較評価	113
2.7.1 表面流・中間流を考慮した kinematic wave モデル (KSAV モデル)	114
2.7.2 山腹斜面集中化モデル (LH モデル)	115
2.7.3 KSAV モデルと LH モデルの関係	116
2.7.4 KSAV モデルの代用としての kinematic wave (KW) モデル	118
2.7.5 確率過程的シミュレーション	118
2.7.6 LH モデルと KW モデルの比較評価	118
2.8 結 語	121

3	洪水流出のリアルタイム予測の確率過程的手法	125
3.1	洪水流出のリアルタイム予測に関する従来の研究	125
3.2	降雨予測について	126
3.3	洪水流出のリアルタイム予測の手法	126
3.3.1	状態空間型流出モデルとその確率過程的取り扱い	126
3.3.2	確率過程的状态空間モデルと Kalman フィルタ	127
3.3.3	状態推定法とパラメタ推定法	128
3.3.4	ノイズ項の統計量について	128
3.4	日流量モデル (線形 SISO システム) への適用	129
3.4.1	ARMAX モデル	129
3.4.2	ARMAX モデルの状態空間表現	129
3.4.3	ARMAX-Kalman プレディクタ	130
3.4.4	モデル同定	130
3.4.5	予測性能の比較評価	130
3.5	非線形システムの場合の取り扱い	133
3.5.1	予測更新	133
3.5.2	観測に伴う状態推定の更新 (観測更新)	134
3.5.3	数値計算上の注意	134
3.6	モデルの不十分さへの対処 — 有色ノイズの考慮	135
3.7	単一流域 (非線形 SISO システム) への適用	136
3.7.1	パソコン用プログラム RFP1	136
3.7.2	降雨予測誤差考慮のためのシミュレーション	138
3.7.3	モデル誤差と観測誤差について	138
3.7.4	有色ノイズ導入の効果	139
3.7.5	リアルタイム流出予測の評価規準	139
3.7.6	降雨予測精度, リードタイムと流出予測精度の関連	145
3.7.7	まとめ	145
3.8	複合流域 (非線形 MIMO システム) への適用	146
3.8.1	由良川流域の洪水流出モデル	146
3.8.2	由良川流域における洪水流出の確率予測手法	150
3.8.3	ノイズの分散の大きさと予測結果	153
3.8.4	リードタイムと予測精度について	155
3.8.5	まとめ	155
3.9	洪水流出の確率予測の意義	155
3.10	結 語	155

1 概説 — 水資源システムの性能評価の基本的考え方	163
1.1 水資源システムとその計画・管理	163
1.2 水資源システムのシステム論的アプローチ	164
1.3 水資源システムの性能評価の手法と規準	164
1.3.1 安全性・信頼性によるシステムの評価	164
1.3.2 システムの信頼性の評価規準	166
1.3.3 その他の性能評価の規準	166
1.4 利水安全度	167
2 利水用貯水池システムの操作方式とその評価	173
2.1 本章の目的	173
2.2 対象流域と水文データ	175
2.2.1 時間単位について	175
2.2.2 貯水容量について	175
2.2.3 流入量について	177
2.2.4 水需要量について	178
2.3 確率 DP モデルの定式化	178
2.3.1 モデルの変数とその変数間の関係	178
2.3.2 関数方程式と目標放流量の決定	182
2.3.3 評価関数の設定	182
2.3.4 設定した評価関数と平常ルール	183
2.4 平常時の貯水池操作ルールの比較評価	186
2.4.1 評価関数それ自身による各ルールの評価	186
2.4.2 システム性能評価規準による評価	187
2.4.3 まとめ	190
2.5 渇水時の貯水池操作方式について	191
2.5.1 渇水ルール	191
2.5.2 渇水ルールの有効性の検討	193
2.5.3 渇水予測による渇水ルールへの切り替え	196
2.6 切り替え方式の 53 年渇水への適用	197
2.7 結 語	198

3	渇水対策ダムをもつ利水システムの性能評価	201
3.1	渇水対策ダムの概要	201
3.2	システム性能評価の規準	201
3.3	昭和 53 年時点の利水システムの安全度	203
3.3.1	信頼度について	203
3.3.2	回復度について	203
3.3.3	深刻度について	203
3.4	渇水対策ダム導入の効果 — 昭和 53 年 (1978 年) のシステムに導入した場合	204
3.4.1	渇水対策ダムの容量について	204
3.4.2	渇水対策ダムへの流入量について	204
3.4.3	渇水対策ダムの運用方式について	205
3.4.4	結果と考察	205
3.5	将来の水需要の増加を考慮した場合の渇水対策ダムの効果について	209
3.5.1	利水システムの現況 — 昭和 62 年 (1987 年) における安全度評価	209
3.5.2	2001 年の水需要予測に基づく安全度評価	210
3.5.3	渇水対策ダム導入の効果について — 2001 年の場合	212
3.5.4	五ヶ山ダムについて	216
3.6	結 語	218
	結 論	221

序 論

序 論

本論文は、水資源システムの分析・計画・管理において種々提案され、実用されている確率論的なモデルと手法について評価を行ったものである。特に、水文頻度解析、洪水流出予測、渇水対策 という三つの重要な課題について、基本的なモデルと手法を評価する手順 規準を提示し、これらの分野での解析法の選定にあたっての有用な知見を得ている。

本章では、まず、水文学・水資源工学・水資源システムの概要を述べ、この分野で適用されてきた確率論的手法とシステム分析の歴史を概観して、本論への導入としたい。

1 水文学・水資源工学・水資源システム

地球上の水循環一般を取り扱う科学が水文学 (hydrology) であり、地表面近辺のみならず、地中深く、また、上空高く、水分の存在する領域すべてを対象とする広範な学問である。ユネスコの定義 (1964 年) によれば、

Hydrology is the science which deals with the waters of the earth, their occurrence, circulation and distribution on the planet, their physical and chemical properties and their interactions with the physical and biological environment, including their responses to human activity.

Hydrology is a field which covers the entire history of the cycle of water on the earth.

であり、水と人間活動との関わりをも包含していることに注意したい。

水文学と題する最初のまとまった著作は、1904 年の Mead のものであろうと言われており、その後の多数の著作について高橋 (1978) は広範なレビューを行っている。わが国で水文学の概要を最初に紹介したのは、阿部 (1933) であるが、それ以来、水文学と名の付いた著書は、金子 (1957) の“農業水文学”まで見当たらないようである。その後は、1970 年代になってから今日まで、多数の水文学に関する著書が出版されるに至った (たとえば、岩井・石黒 (1970)、山本 (1972)、市川 (1973)、金子 (1973)、金丸・高棹 (1975)、中野 (1976)、高橋 (1978)、高瀬 (1978)、樫根 (1980)、神田 藤田 (1982)、岡本 (1982)、日野・長谷部 (1985) など)。

一方、土木工学 (civil engineering) は、地球上で人間の存在する領域すべてを対象とする、これまた広範な学問であり、人間活動の領域の拡大につれてますます対象が広がり、地球のみならず、宇宙までもがその対象となりつつある。

土木工学の中で水を取り扱う分野は、水工学 (hydraulic engineering) あるいは水資源工学 (water resources engineering) と呼ばれる。人間活動の内容的・空間的領域が地表面付近のものに限られていた当初は、水理学 (hydraulics) に基礎を置いて水工構造物の計画・設計・施工を行うというのが土木工学における水に関わる分野の主たる内容であり、水工学と呼ばれてきたわけである。

しかしながら、人間活動の領域の拡大と科学の取り扱う領域の拡大とともに、水の問題をより総合的に取り扱う必要が生じてきた。水工学は、単に水と土と構造物を取り扱うだけではなく、より広い視点が要求されるようになってきたのであり、対象の広がりとともに、そのアプローチも変容を遂げてきた。したがって、水工学という場合、hydraulic engineering という言葉の印象から水理学を主とするものをイメージするのではなくて、より総合的なものをイメージするのが適当と言えよう。

一方、水資源工学は、わが国では、当初、主として利水の面を中心に考えられてきた。すなわち、治水は河川工学・河川計画 (治水計画)、利水は水資源工学・水資源計画 (利水計画) というような色分けであった。しかしながら、水資源工学という言葉は、海外ではより広義に捉えられており、利水だけでなく、治水、環境保全なども含めて、土木工学の中で水に関わる工学一般を指すものと解してよい。

したがって、水工学と水資源工学のオーバーラップする領域は、いまや非常に大きいのである。結局、水全般を取り扱う科学としての水文学、工学としての水資源工学 (あるいは水工学) ということになる。

水資源システムは、一口で言えば、地球上の大きな水循環の中における人間と水との関わり場と言えよう。このシステムは、降水流出といった基本的な水の自然的な挙動のみならず、社会経済的側面からの影響を強く受ける水と人間の挙動をも内包するものであり、複雑多岐多階層の性質をもつものである。そして、このシステムの分析・計画・管理の学問的基礎を与えるのが、水文学、水資源工学である。

2 確率論的アプローチとシステム分析

地球上の水の挙動の中で、特に古くから人々の関心を集めてきたのは河川水の流れであろう。その流れが異常な量を示すとき、洪水または渇水として、火山の爆発や地震などの天変地異とともに今なお人間の生命を脅かす。

こうした異常な現象が今度いつまたやってくるのか、それに対してどのように対処するのか。この問題に合理的な解答を与えようとして、上記の水にかかわる工学が発展してきたのである。

2.1 水文統計

洪水や渇水などの異常な（稀にしか起こらない）現象の頻度（生起特性）を把握するために、確率論的アプローチが導入されるようになったのは、1910年代アメリカにおいてである（Fuller (1914), Hazen (1914)）¹。すなわち、洪水流量や降水量などの水文諸量が従う確率分布形を解析的または経験的に選び出し、水文量とその値を超過する確率との関係を明らかにして、この確率的な概念に基づいて洪水流量を合理的に推定しようという考え方である。その後、1920年代から1940年頃にかけて、Foster, Goodrich, Hazen, Slade, Gumbel, Kimballらの研究が行われ、ドイツではGrassberger, フランスではGibratが同時期（1930年代初頭）にこうした研究を始めている。

わが国では、戦後、岩井（1947）がこれらの研究を紹介するとともに、対数正規分布に関する解法を詳細に吟味し（岩井（1949a））、主要河川に適用した（岩井（1949b））のが最初である。さらに、石原・岩井（1949）は、こうした水文統計学の考え方の河川計画への導入を提案した。昭和33年（1958年）の建設省“河川砂防技術基準（案）”に、計画高水流量の決定に際して確率洪水概念を基準とすることが明確化され、今日のわが国の河川計画に定着するに至った。

その後、1970年頃までの間に、角屋、高瀬、石黒、長尾らの精緻な研究が続々となされ大きな成果を上げ、手法的に一応の確立を見たわけである。最近では、データの蓄積とコンピュータの発達により、これらの手法の見直しと改良、新たな手法の提案がなされてきている（星ら、江藤ら、寒川ら、石原、高棹・宝、竹内・土屋など）。個々の手法等については、第1編で折りに触れてさらに詳しく述べる。

2.2 システム分析とシステム工学的手法の導入

近代水文学は、1930年代をその出発点であるとするのが通説となっている（たとえば、高棹（1971））。Hortonによる水文循環（hydrologic cycle）の概念の提示（1931年）、流出解析手法としてのShermanの単位図法（1932年）、アメリカTennessee川の総合開発事業（1933年にTVA法が成立）などがその後の水文学研究に大きなインパクトを与えたことによる。これらはすべて、水文学・水資源工学におけるシステム分析の萌芽的業績と言える。なぜならば、水文循環の概念は、地球上の水の挙動を一つの大きなclosed systemとみなしたもの（水循環システムと呼べよう）にはかならず、単位図法は、black-box 的にはあるが、流域を降雨を入力とし河川流量を出力とする入出力システム（流出システム）と捉えているからである。また、TVA事業は、多目的かつ広域的な水管理を取り扱うもの（水資源システム）の大規模な開発・整備であった。

1960年頃になると、コンピュータの発展と月ロケット（アポロ）計画により、システム工学的手法が大いに発展し、水資源問題にも取り入れられるようになった。特に、その後の研究動向に大きな影響を与えたのは、1955年から60年頃にかけてのHarvard大学の水資源研究グループによる“Harvard Water Program”であると言われている。この成果は、Chow（1964a）によって直ちに応用水文学ハンドブックに紹介され全世界に広められ、わが国でも取り入れられた。わが国におけるこうしたアプローチの先駆的研究は、日野（1972）によりレビューされている。

システム工学的手法とは、概括的に言うと、対象とするシステムの数学的定式化、目的関数の設定、最適解の抽出という手順を踏むものであり、可能な限りの代替案を列举し、コンピュータを駆使して、線形計画法（LP, linear programming）、非線形計画法（NLP, nonlinear programming）、動的計画法（DP, dynamic programming）、シミュレーションなどの数学的技法を用いて目的関数の最適化を行うものである。これにより得られる予測結果に基づいて、所与の制約条件のもとで目的を達成するのに最も望ましいと思われる判断（意志決定）を行う。こうした手法の水文・水資源の分野への適用はおびただしい数のものがあり、わが国では、高棹・瀬能（1970）によるダム群の洪水制御へのDPの応用以来、竹内、室田・江藤、高棹・池淵・小尻、吉川・岡田、室田・神田、長尾、建設省土木研究所などによって発展させられてきた。

このシステム工学的手法でまず重要なのは、問題とするシステムの数学的定式化である。同一のシステムを取り扱う場合においても、分析の対象と目的によりその定式化（モデル化）が異なってくる。

¹さらに古くは1880~1890年のHerschel, Freemanらであるという（岩井・石黒（1970））。

流出過程を例にとると、河川流域は降水を入力とし河川流量を出力とするシステムとみなすことができる。これを流出システム（流出系）と呼ぶ。前述の Sherman の単位図法（unit hydrograph）は、流出システムを線形システムとしてとらえ、Duhamel 型の積分式で表現したものである。わが国では、1950 年代に単位図法の適用が試みられた（中安（1953）、立神（1954）、石原・田中・金丸（1956）など）が、非線形性の強いわが国の流出システムには必ずしも適合しないことが判明した。1950 年代半ばから、力学的観点からの（水理学を基礎とする）流出システムの分析（雨水流法）が行われるようになった（Iwagaki（1955）、末石（1955）、岩垣・高棹（1956））。特に、石原・高棹（1959）は、単位図法と雨水流法の関連を詳細に論じ、洪水到達時間、流域の空間スケールの問題を明らかにした。流出システム分析における時・空間スケールの重要性がこの時点で既に議論されていたのである。また、システム工学的手法の特徴であるコンピュータの利用という点では、やはりちょうどこの頃から、洪水追跡、雨水流出の計算をアナログ・コンピュータを使って行う試みが始められていた（石原・石原（1955）、石原（1959））。

さて、河川流域のような現実のシステムをモデル化する場合、目的によってその仕方が異なるのはよいとしても、モデルによって表し得ない部分が出てくる。たとえば、地形・地質・植生・降水などの流域内で不均一に分布するものをある一定のスケールで均一にモデル化することによる誤差が生じる。これを“モデル誤差”と呼ぶことにしよう。また、モデル化に際して必要なデータ（地形・地質・植生・降水・流量など）を観測（計測）する場合に、空間的・時間的にある程度離散化することによる誤差もしくは観測機器そのものによる誤差が存在する。これを“観測誤差”と呼んでおこう。さらに、植生・蒸発散・降水など、本来時間的・空間的に変動する性質をもつ諸量もあり、全く偶然に変動する成分も含まれている。これらのモデル誤差、観測誤差、変動成分が存在する流出システムは、“stochastic”であると言われる。

流出システムに限らず、水文循環システム、水資源システムにおいても状況は同じであり、これらのシステム分析においては、システムそのものの不確実性とわれわれ人間のシステム認識の不確実性により、stochastic な取り扱いが合理的かつ不可欠である。stochastic という言葉は、“確率論的”、“推計学的”などと訳されることが多いが、なかなか適切な訳語は存在しないようである。本研究は、水資源システムにおける確率論的なモデルと手法を取り扱うものであるから、stochastic という言葉の意味について次の節で考察を加えておこう。

3 stochastic について

3.1 deterministic と stochastic

“stochastic”という言葉が確率統計学の分野のみならず、物理学・生物学・経済学においてもよく使われるようになったのは、1940 年頃のものである（伊藤（1942））。伊藤は、

ストカスティックといふ観念はデターミニスティック（決定論的）— 或ひは因果論的 — なる観念のアンチテーゼとして生れたものであるが、之等は全然矛盾し、対立する観念ではなく、互いに密接な関係がある。

と述べ、stochastic と deterministic の関係を論じている。

流出システムを例にとると、偶然変動成分を除いて、現象をわれわれが完全に把握し記述することができるのであれば、流出過程は物理的な現象であり deterministic であると言える。しかしながら、前述したようなモデル誤差、観測誤差、変動成分などを考慮しなければならないとき、このシステムは stochastic である。そして、この stochasticity のなかの非決定論的部分を表現する方法として確率論が適用される。つまり、これらのモデル誤差、観測誤差、変動成分に対して、何らかの確率モデルを仮定するのである。stochastic が“確率論的”と訳されるのはこの事情によると言える。

高棹（1963）は、

われわれは出水現象の機構の本質がストカスティックな力学的現象であるという基本的な観念に立戻って、出水現象理解の強固な方法論を組み立てていく必要があろう。その第一の段階は出水現象のなかから集団的な規則ないしは法則を引き出すことであり、第二の段階はそのなかに潜在していて集団的な規則性にゆらぎを与えるような諸因子を確率論的にとらえることである。

われわれは、第一の段階においてさえまだ十分成功してはいない。……

と述べている。

流出機構の解明とは、stochasticity の中の非決定論的部分の割合をなるべく小さくする努力である。流出システムに内在する諸々の素過程およびそれらのかかわり合いは、現在のところある程度解明されている。全く解明の

進んでいないシステムは、単に入出力だけを取り扱う black-box system である。これが明確に把握できたとき、流出システムは white-box system として取り扱えることになる。したがって、現状の流出システムは black と white の中間、すなわち、gray-box system であると言える。

このように、stochastic と deterministic とは全く対立する概念ではなく、現実のほとんどあらゆるシステムを、何らかの方法で表現しようとするときに必然的に共存する概念なのである。

3.2 random, probabilistic, statistical と stochastic

上述のように、“stochastic” という言葉は、“確率論的”あるいは“確率統計的”と訳されることが多い。同様の意味をもつ言葉に“random”、“probabilistic”、“statistical”などがある。この節では、Klemeš (1978) に従って、これらの区別を明らかにしておこう。

random という言葉は、stochastic に対する同義語としてしばしば用いられる(たとえば、Yevjevich (1974))。しかしながら、本論文ではそれらの意味は区別される。random という言葉は、所与の集合の要素の全くでたらめな順序や配列に対して用いられる。こうして、たとえば、random な系列(sequence or series)とは、その関係が互いに独立な(よって、無相関の)、すなわち、一つの要素の位置と大きさが他のどの要素あるいは要素の集団位置や大きさから決められ得ないものを意味する。文献中では、この概念は pure random としばしば呼ばれる。

stochastic という言葉は偶然性(randomness)の要素と決定論(determinism)の要素の両方を含む関係、変数、あるいは過程のために用いられる。よって、stochastic な実在 Θ は、 $\Theta = \xi + \varepsilon$ なる和とみなされる。ここに、 ξ と ε はそれぞれ決定論的(deterministic)および偶然的(random)成分である。決定論的成分はしばしば“全体的な変化傾向(overall trend)”あるいは“信号(signal)”と解釈され、偶然的成分は“誤差(error)”あるいは“雑音(noise)”と解釈される。ギリシア語の $\sigmaτόχος$ (= 目標とする(target), あるいは目指す(aim))の本来の意味に一致させれば、stochastic な関係とは、決定論的成分によって示される関係を“目指す”ものとみなすことができる。二つの成分、deterministic と random は、単に stochastic の特別な場合であって、その二つの成分の一方あるいは他方が零に向かうにつれて近づいていく反対側の極限を表す。この解釈によれば、現実の世界においては厳密に決定論的な関係というものが存在することを証明することができない。なぜなら、どのような経験的な検証にも一方では計測(measurement)というものを、他方では正確な再現性というものを含んでいるからである。計測の精度が限られていることにより、あるいは、時間が不可逆的な世界においてはどんな特定の現象も正確に再現することは本質的に不可能であることにより、常に雑音が存在し、また、純粋に決定論的な関係というものは抽象の範囲—理想化された関係、すなわち、事象そのものよりも概念間の関係—に格下げされざるを得ないのである。決定論的法則のわれわれの直観的な認識というものが stochastic であることが認められるであろう。われわれは、実際の計測値が所与の決定論的法則に単に“近似的に”一致することを“期待している”のである。実際、仮説的な決定論的法則(あるいはモデル)が実験とあまりに良く合いすぎることは、確信を強めるよりもむしろ疑いを生じさせるであろう。

(中 略)

“probabilistic” という言葉は、確率を割り当てるのに先験的に既知の(a priori known)メカニズムに関して、すなわち、時に“理論確率(theoretical probability)”と呼ばれるものに関して使われる。“statistical” という言葉は、事象の観測された相対頻度に基づいて後験的に(a posteriori)推測される確率に関して、すなわち、いわゆる“経験確率(empirical probability)”に関して用いられる。よって、probabilistic model というのは因果性、すなわち、所与の現象に対して一定の形式の stochastic な挙動を示す明確な理由の存在を意味しているものであり、一方、statistical model は、関連する probabilistic な(あるいは他の)メカニズムの知識を意味しない。つまり、statistical は単に記述(description)のみを意味するが、probabilistic は記述と説明(description and explanation)の両方を意味するのである。

“stochastic hydrology” という言葉が“確率統計水文学”と訳されることがある。これまで見てきたように、stochastic という概念は、何らかの因果法則に従うシステムの挙動(それはある程度決定論的である)の部分とそれ以外の部分からなるものである。この決定論的に説明できない部分あるいは時間的空間的に変動するシステム要素に確率論的な概念が導入される。上の Klemeš の説明にもあるように、stochastic と probabilistic は近いニュア

ンスをもっている。Chow (1964b) も “stochastic or probabilistic” という表現をしばしば用いており、Yevjevich (1974) は, stochastic, probabilistic, random を同義語として使っている。このような事情で, “確率統計水文学” という訳出になったと言える。²最近では, stochastic hydrology が単なる統計的アプローチではないことを積極的に示す意味で “physically-based stochastic hydrology” という言葉がよく使われている。

わが国では, 土木学会水理委員会において, 1975 年から 2 年間にわたって “確率統計水文学” 研究小委員会 (日野幹雄委員長) が設けられ, この分野でのそれまでの研究成果のレビューと新たな方向の模索がなされた³。その後, 神田・藤田 (1982) は, 内外の水文学における確率論的アプローチによるおびただしい数の成果を取りまとめている。さらに, 土木学会水理委員会では, 1984 年から 1986 年にわたって, “流出現象の物理機構” に関する研究小委員会 (高埴琢馬委員長) を設け, 物理学的視点に立脚した水文システム (流出システム) の解析法をレビューしている⁴。われわれは, こうした知見を踏まえながら, システムに本質的に内在する stochasticity の中の非決定論的部分の割合をなるべく小さくする努力を重ねていかねばならないのである。

4 本論文の構成

本論文では, 水資源システムにおける三つの基本的課題に関する確率論的モデルと手法を取り扱った。次章以後の構成を簡単に述べると以下のようなものである。

第 1 編においては, 水工計画における基本的な重要事項である水文頻度解析の諸問題を論じた後, 母数推定法および確率分布モデルの評価規準と評価の手順について Monte Carlo シミュレーションあるいは実際の水文データに基づいて客観的かつシステムティックに議論した。

まず, 第 1 章では, 水文頻度解析の意義とその問題点を明らかにして著者の基本的立場を述べた。第 2 章では, 極値水文量の頻度解析によく用いられる 3 母数対数正規分布, Gumbel 分布, 一般化極値分布について種々提案されている母数推定法の優劣を, 標本の大きさ (データ数) と関連づけながら明らかにした。第 3 章では, 現在, 頻度解析に使われている, あるいは最近提案されまだ十分検証の済んでいない, ほとんどあらゆる種類の 2 ないし 3 母数の確率分布モデルを候補として, それらを実際の極値水文データに当てはめ, まず, 適合度の客観的な評価規準 (標準最小二乗規準, 最大対数尤度, 情報量規準, 相関係数) を用いて, それらのモデルの適合度を明らかにした。次に, これらの中から適合度の劣るものを除外し, 再現確率統計量 (確率水文量) の変動性を jackknife 法や bootstrap 法と呼ばれるリサンプリング法を用いて評価し, この変動の小さいモデルを採用するというシステムティックなモデル評価の手順を提案した。

第 2 編においては, 河川水文学の基本的課題とも言える流出システムの分析について, モデル構築の基本的考え方を論じ, stochastic な観点からの流出モデルの評価法, Kalman フィルタ理論を応用した洪水流出のリアルタイム予測の確率論的手法を提示した。

第 1 章では, 流出システムモデルを構築する際の基本的考え方, モデルの同定手法とモデル評価の規準について述べ, 著者の立場を明らかにした。第 2 章では, stochastic な観点からの流出モデルの評価法を提示し, kinematic wave モデルを基本として, それを簡略化した形式のモデルの評価問題を取り上げて, 斜面系および斜面 + 河道系の表面流出モデル, 斜面系の表面流・中間流モデルへの適用例を示した。第 3 章では, 流出モデルを stochastic な非線形状態空間モデルで記述し, Kalman フィルタ理論を非線形連続・離散形の流出システムに適用する一般的な方法を提示した。

第 3 編は, 水資源システムの分析に関して, 利水安全度 (利水システムの信頼性) の評価, ソフト・ハード両面からの渇水対策の問題を取り扱ったものである。

まず, 第 1 章では, 水資源システムの性能評価の手法と規準について述べ, システムの信頼性評価の基本的考え方を述べた。第 2 章では, 利水用貯水池の年間の運用計画 (操作ルール) の最適化によく用いられる確率 DP において設定される評価関数として望ましいものを明らかにするとともに, 渇水時の操作方式についてシステム性能評価の観点から検討した。第 3 章では, 最近になってようやく実現化されることになった渇水対策ダムについて検討し, その導入が当該地域の利水安全度向上に及ぼす効果をシステム性能評価規準により定量的に評価した。

²これまでの議論により, “stochastic” の意味するところは明瞭であり, 確率的成分を含む物理過程という意味あいでは “確率過程の水文学” とでも呼ぶのがふさわしいと思われる。

³その概要は, “確率統計水文学の展望” (土木学会誌 1977 年増刊号 pp. 12-19), “講座・確率統計水文学 1-6” (土木学会誌 1977 年 12 月号から 1978 年 5 月号に連載) にまとめられている。

⁴“物理水文学における最近の進歩” (土木学会論文集, 第 387 号 /II-8, 1987 年 11 月号, pp. 39-56)。

参 考 文 献

- 阿部謙夫 (1933): 水文学, 岩波書店, 70pp.
- Chow, V.T. (1964a): Water Resources, Part II. System Design by Operations Research, in Handbook of Applied Hydrology, McGRAW-HILL, (ed.) V.T. Chow, Section 26-II, pp. 26-30-26-47.
- Chow, V.T. (1964b): Statistical and Probability Analysis, Part I. Frequency Analysis, in Handbook of Applied Hydrology, McGRAW-HILL, (ed.) V.T. Chow, Section 8-I, pp. 8-1-8-42.
- Fuller, W.E. (1914): Flood Flows, Trans. ASCE, Vol.77, pp. 565-694.
- Hazen, A. (1914): Storage to Be Provided in Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply, Trans. ASCE, Vol. 77, pp. 1539-1669.
- 日野幹雄 (1972): 水理学水文学におけるシステム解析, 1972 年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, A-3, 32pp.
- 日野幹雄・長谷部正彦 (1985): 水文流出解析, 森北出版, 254pp.
- 市川正巳 (1973): 水文学の基礎, 古今書院, 318pp.
- 石原藤次郎・石原安雄 (1955): 洪水追跡用アナログ・コンピューターについて, 土木学会論文集, 第 24 号, pp. 44-57.
- 石原藤次郎・岩井重久 (1949): 水文統計学上より見た本邦河川計画の合理化について, 土木学会誌, 第 34 巻, 第 4 号, pp. 24-29.
- 石原藤次郎・高棹琢馬 (1959): 単位図法とその適用に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第 60 号 別冊 (3-3), 34 pp.
- 石原藤次郎・田中要三・金丸昭治 (1956): わが国における単位図の特性について, 土木学会誌, 第 41 巻, 第 3 号, pp. 18-23.
- 石原安雄 (1959): 雨水流用演算器について, 土木学会論文集, 第 60 号, pp. 37-45.
- 伊藤 清 (1942): ストカスチック論, 統計数理研究, 第 1 巻, 第 2 号, pp. 113-123.
- Iwagaki, Y. (1955): Fundamental Studies on the Runoff Analysis by Characteristics, Bull. Disaster Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No. 10, pp. 1-25.
- 岩垣雄一・高棹琢馬 (1956): 降雨および流域特性が流出関係に及ぼす効果について, 京都大学防災研究所創立 5 周年記念論文集, pp. 191-200.
- 岩井重久 (1947): 水文学における非対称分布に就て, 土木学会論文集, 第 1, 2 号合併号, pp. 93-116.
- 岩井重久 (1949a): Slade 型分布の非対称性の吟味及びその 2, 3 の解法, 土木学会論文集, 第 4 号, pp. 84-104.
- 岩井重久 (1949b): 確率洪水推定法とその本邦河川への適用, 統計数理研究, 第 2 巻, 第 3 号, pp. 21-36.
- 岩井重久・石黒政儀 (1970): 応用水文統計学, 森北出版, 370pp.
- 金丸昭治・高棹琢馬 (1975): 水文学, 朝倉書店, 223pp.
- 神田 徹・藤田睦博 (1982): 水文学 — 確率論的手法とその応用 —, 技報堂出版, 275pp.
- 金子 良 (1957): 農業水文学, 土木雑誌社, 295pp.
- 金子 良 (1973): 農業水文学, 共立出版, 286pp.
- 樫根 勇 (1980): 水文学, 大明堂, 272pp.

- Klemeš, V. (1978):** Physically Based Stochastic Hydrologic Analysis, in Advances in Hydrosience, Vol. 11, (ed.) V.T. Chow, Academic Press, pp. 285-356.
- 中野秀章 (1976): 森林水文学, 共立出版, 228pp.
- 中安米蔵 (1953): 本邦河川洪水の Unit Graph について, 第 7 回建設省直轄技術研究会, pp. 333-346.
- 岡本芳美 (1982): 技術水文学, 日刊工業新聞社, 309pp.
- 末石富太郎 (1955): 特性曲線法による出水解析について — 雨水の流出現象に関する水理学的研究 (第 2 報) —, 土木学会論文集, 第 29 号, pp. 74-87.
- 高橋 裕, 編 (1978): 河川水文学, 共立出版, 218pp.
- 高棹琢馬 (1963): 出水現象の生起場とその変化過程, 京都大学防災研究所年報, 第 6 号, pp. 166-180.
- 高棹琢馬 (1971): 洪水流出系の分析と総合に関する基礎的研究, 128pp.
- 高棹琢馬・瀬能邦雄 (1970): ダム群による洪水調節に関する研究 (I) —DP の利用とその問題点—, 京都大学防災研究所年報, 第 13 号 B, pp. 83-103.
- 高瀬信忠 (1978): 河川水文学, 森北出版, 328pp.
- 立神弘洋 (1954): 木曾川洪水の水文学的研究, 294pp.
- 山本莊毅, 編 (1972): 水文学総論, 共立出版, 227pp.
- Yevjevich, V. (1974):** Determinism and Stochasticity in Hydrology, Journal of Hydrology, Vol. 22, pp. 225-238.

第 1 編

水文頻度解析におけるモデルと手法の評価

第1章

概説 — 水文頻度解析の意義とその問題点

1.1 水文頻度解析

水資源システムの設計・計画の基本量を定めるには、当該の水文データを収集し、そのデータに水文学的および確率統計学的観点から一定の評価を加えた後、その水文学量の所定の再現期間に対応する規模を求めるという手順を踏む。この手順を水文頻度解析という。

まず初めに、1変数の水文頻度解析に対する基本的考え方を述べておきたい。

代表的な水文学量として、豪雨データを例にとると、近年、その地域でそれまでに経験したことの無いような極めて大きな豪雨が各地で生起している（たとえば、岸原・武蔵（1981）、高棹（1983）など）。年最大降水量の系列を極値（Gumbel）確率紙にプロットするとその時点まではほぼ一直線上に並んでいたのに、その豪雨時のデータはその直線から大きく外れてプロットされることになり、元の直線から再現期間を推定すると、何千年、何万年という値になる。このようなデータは、異常値とみなされ、解析の対象外とされたり、何か特別な処理がなされることが多い。しかしながら、そのような値の生起は十分あり得ることであり（石原（1987））、明らかに異常値であるという根拠がない限り、棄却されるべきでない。また、計画規模を安全側に見積る便宜的な方法として、大きい方からいくつか（たとえば、10個程度）を取り出して確率評価することがあるが、せっかく蓄積されたデータの大半を棄却するこのようなやり方は、統計学的観点からは不合理な取り扱いであるといわざるを得ない。

データがさらに蓄積されると、異常値とみなされていた値の回りに次々と同様の値が観測されるという事態も生じてきている。ある地点ではそれまでに経験したこともない飛び抜けて大きな値が、実は、その周辺地域ではごく頻繁に生じていたりということも多い（岸原・武蔵（1981））。すなわち、異常値とみなす錯誤が生じる大きな理由の一つは、データの少なさにあると言える。こうしたデータ不足の問題を解決する手段として、地域解析（regional analysis）や、近代的観測開始以前の歴史的資料や事象生起の痕跡を利用する方法（paleohydrologic analysis、古水文学的解析）の適用が最近の水文頻度解析の一つの大きな流れとなっている（たとえば、Singh（1987））。

さて、データが十分に蓄積された場合においても、今度は別の問題が持ち上がってくる。それは、データが一直線上に並ばず、ある値を境に大きく屈曲することがあるという問題である。この場合、その値より上側のデータと下側のデータは現象として異なる母集団に属するのではないかという疑問が生じてくる。すなわち、降水の場合であれば、降水の発生過程に立ち帰って、水文気象学的・気象力学的観点からの厳密なデータの吟味が重要となる。こうした発生過程の解析（すなわち、statistical な解析にとどまらず、stochastic な観点からの解析）に基づく新たな極値理論の展開が望まれるのである。こうした解析に基づいて、対象とする水文学量に適する分布関数をただ一つ決めることができるならば、それを迷うことなく用いればよいわけである。その際、後述するように、所与のデータへの overfitting を避ける工夫が必要となる。

データの吟味の結果、二つ以上の異なる母集団の存在が明らかになったときには、それらの母集団の性質とその組み合わせによってどのような取り扱いをするかが異なることになる。たとえば、高潮の生起原因別の取り扱い（河田（1987）、合田（1988）など）が参考になろう。ただし、データを細分化すると、データ数がまた少なくなるというジレンマに陥る¹。

このように、水文統計においては、データの吟味が基本的に最も重要であり、ここで強調しておきたいのは、単なる statistical な解析にとどまらず、stochastic な観点に立脚することが益々必要になってきているということである。しかし、データの吟味が stochastic な観点から十分なされたとしても、結局、所与の一群のデータが二つ以上

¹ 台風性豪雨による洪水であろうが、前線性豪雨による洪水であろうが、同じ堤防によってそれを防がなければならないこともまた確かである。現象解析論と計画論において、データの取扱いは自ずと異ならざるを得ないように思われる。

の異なる母集団からのものと言明できない、あるいは、前述したような母集団の発生過程に基づく分布が確定できない、といった状況が当面ほとんどであろう。すなわち、データの独立性・等質性が仮定せざるを得ないという状況である。

データの独立性・等質性が仮定できる状況のもとであっても、いくつかの未解決の問題が残されている。

たとえば、ある水文資料に対して想定した確率分布モデルの母数を推定するとき、どのような母数推定法を用いればよいのかが明らかでない。ある一つの分布モデルに対して多種多様な推定法が提案されている。さらには、降水量や流量などの水文資料は一般に観測期間が短く、小標本であることが多い。このとき、母数や確率水文量の推定値が大きく偏ったり、著しく変動することがあるが、こうした場合の対処の仕方が確立されていない。

また、候補となり得る確率分布モデルも多種多様である。水文資料に対して最適な分布モデルを決定するとき、モデル評価の規準としてデータとモデルの適合度が用いられるが、規準ごとに選択される分布モデルが異なったり、同程度の適合度を示す分布モデルが複数個あるとき、どのように最適分布を決めればよいのかが明らかにされていない。

この第1編は、これらの問題を取り扱ったものである。まず、第1章のこのあとの節においては、最も基本的な2母数の確率分布モデルについて、琵琶湖流域の実際の水文データを用いて水文頻度解析の諸問題を例示する。第2章では、三つの確率分布モデルを取り扱い、Monte Carlo シミュレーションによって模擬発生させた多数のデータを用いて母数および確率水文量の推定値の偏倚と変動性（推定誤差の大きさ）を求めて、それぞれのモデルについてどの母数推定法が良いのかを比較評価する。第3章では、適合度だけでなく、確率水文量の変動性をも評価規準とするモデル評価の手順を提示し、降水量・河川流量の極値データに対してこの手順を適用してその有用性を検証する。

1.2 超過・非超過確率とリターンピリオド

ある水文量がどのような頻度で生起するかといった問題は、水工施設の設計や治水・利水の計画を行う上でその基礎となるものである。水文量がある確率分布に従う確率変量であるとすれば、その生起頻度は以下のような超過確率、非超過確率といった概念で表すことができる。

変量 X の確率密度関数を $f(x)$ 、累積分布関数²を $F(x)$ とすると、

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (1.1)$$

であり、 x が指定されたとき、 $F(x)$ を x の非超過確率、 $1 - F(x)$ を超過確率という。対象とする変量が、洪水流量のように大きいほど危険な場合は超過確率が危険度の指標とされ、渇水流量のように小さいほど問題な場合は非超過確率がその指標とされる。

水文量のある値 x_a の非超過確率（場合によっては超過確率）を q とするとき、

$$T = \frac{1}{n(1-q)} \quad (1.2)$$

は、水文量 $X = x_a$ に対応するリターンピリオド（あるいは再現期間）と呼ばれる。ここに、 n は $F(x)$ の推定に用いた水文量 X の年間平均生起度数で、 x_a を“ T 年確率水文量”（一般には、“再現確率統計量”または“分位値 (quantile)”）と呼ぶ。 X として年最大水文量を取り扱うときは $n = 1$ であり、また、 $q = F(x_a)$ であるから、 T 年確率水文量は $100q\%$ 分位値 (percentile, パーセンタイル) に相当する。たとえば、50 年確率水文量は 98% 分位値、2 年確率水文量は 50% 分位値（すなわちメジアン）である。

1.3 水文頻度解析モデル

対象とする水文量の所与の値に対するリターンピリオドを求める、あるいは、所与のリターンピリオドに対応する水文量の値（確率水文量）を求める際に用いる確率分布を水文頻度解析モデルと呼ぶことにしよう。ある一つの水文量にのみ着目する場合、1 変数確率分布を用いる。今のところ次のようなものが提案されている。

■ 正規分布に基づく分布

²あるいは単に“分布関数”と呼ぶ。

- 正規分布
- 対数正規分布
- n 乗根正規分布
- 極値理論に基づく分布
 - Gumbel 分布 (二重指数分布, 最大値分布 I 型)
 - 対数 Gumbel 分布
 - 一般化極値分布 (GEV 分布)
 - Weibull 分布 (最小値分布 III 型)
 - 平方根指数型最大値分布
- ガンマ分布に基づく分布
 - 指数分布
 - PearsonIII 型分布 (ガンマ分布)
 - 対数 PearsonIII 型分布

- 最大エントロピー分布

これらの多くは実務に使われているものの, 中には提案されて間もなく研究レベルで種々の検討がなされつつあるものも含まれている。一般に, 母数の個数が多くなればデータに対する適合度は良くなるが, パラメタの同定が煩雑になる。通常 2 ないし 3 個の母数をもつ確率分布モデルが用いられる。

1.4 母数推定法

対象とする水文量に対して, ある確率分布を想定し, データにそれをあてはめようとするとき, 母数を推定する手法がいくつも提案されている。今のところ次のようなものが提案されており, それらの多くが実際に用いられている。

- データに適合させる方法
 - 図式推定法
 - 最小二乗法
- データの統計量を用いる方法
 - 積率法
 - PWM (probability weighted moments) 法
 - クオントイル (quantile) 法
 - セクスタイル (sextile) 法
- 尤度関数を最大にする方法
 - 最尤法
- エントロピーを最大にする方法
 - 最大エントロピー法

これらのすべてがあらゆる分布に適用できるわけではない。また, たとえば積率法などは高次積率の算定方法がいくつか提案されており, いく通りかのやり方がある。ある一つの分布に対して母数推定を行おうとするとき, こうした種々の方法のうちどれを用いればよいのかが常に問題となる。

1.5 図式推定法 (確率紙) による確率分布のあてはめ

2 母数の分布をデータにあてはめ、母数や再現確率水文量の推定値を求める簡略な方法として、確率紙 (probability paper) がしばしば用いられる³。確率紙は、累積分布関数 $F(x)$ が直線になるように目盛られており、データを確率紙にプロットしたときに、それらが直線上にはほぼ並んでおれば、その確率紙に対応する確率分布に従うものとみなす。

確率紙による確率分布モデルのあてはめは、図式推定法 (graphical method) と呼ばれる。その具体的な手順は次のようである。

Step 1) 標本の大きさ (データ数) が N のとき、この N 個のデータを値が小さい順に並べ替え、これに改めて番号を付けて、 x_1, x_2, \dots, x_N とする。このような並べ替えを行ったものを順序統計量という。

Step 2) 順序統計量を順次確率紙にプロットする。その際、 i 番目の順序統計量 x_i の値を横軸に、 x_i に想定する非超過確率 p_i の値を縦軸にとる⁴。

Step 3) プロットされたデータに適合するような直線 (平分線 (fair curve) と呼ばれる) を描く。この直線の位置・傾きから分布の母数を推定する。また、この直線によりリターンピリオドの推定を行う。

これら一連の手順において次の三つの項で述べるような問題が存在する。

1.5.1 プロットイング・ポジション

まず、**Step 2** の確率紙へのプロットについては、手作業による確率紙へのプロットの煩雑さ・不正確さの問題と、プロットイング・ポジションすなわち p_i の値をどうとるかという問題がある。プロットイング・ポジションに関してはこれまで多くの研究者により議論されてきておりその主なものは次の形式で与えられる。

$$p_i = \frac{i - \omega}{N + 1 - 2\omega} \quad (1.3)$$

ここに、 ω は $0 \leq \omega < 1$ なる定数で、その値により以下の諸公式として知られている。

- (1) $\omega = 0$ Weibull 公式
- (2) $\omega = 0.5$ Hazen 公式
- (3) $\omega = 0.44$ Gringorten 公式
- (4) $\omega = 0.375$ Blom 公式
- (5) $\omega = 0.4$ Cunnane 公式
- (6) $\omega = 0.25$ Adamowski 公式

ある特定の分布に対して適切な公式が存在する。たとえば、一様分布には (1)、正規分布には (4)、Gumbel 分布や指数分布には (3) がそれぞれ偏倚の小さい公式であるとされている (Cunnane (1978) の検討; 水理公式集 (土木学会 (1985)))。

したがって、対象とする水文量の従う分布が事前にわかっていない場合は、種々の確率紙にプロットする際に、それぞれの分布に適した公式を用いてプロット位置を定めるべきである。しかし、いちいちプロット位置を求め直すのが面倒であるから、どの分布に対しても偏倚があまり大きくならないような折衷案的公式、言い換えると分布に依存しない公式 (distribution-free formula) として Cunnane (1978) により提案されたのが (5) である。その後、Adamowski (1981) は、(1.3) 式で与えられるプロットイング・ポジションが 0 から 1 の間に一様に分布するので、その平均値と分散が一様分布のそれらに一致すべきだとして (6) を導いた。

順序統計学的考察⁵によれば、 i 番目の順序統計量 x_i の累積分布関数 $F(x_i)$ の期待値をとると $i/(N + 1)$ となることが知られており、Gumbel (1958) の推奨もあって、(1) の Weibull 公式はプロットイング・ポジション公式としてしばしば用いられてきた⁶。しかしながら、Weibull 公式が母数や確率水文量の推定に大きな偏りを与えるという指摘がなされ、近年批判にさらされている (たとえば、菊池原 (1971) や Cunnane (1978))。 (2) は、Hazen

³ 解析的な方法であてはめたときの適合度の検証にも用いられる。

⁴ これはわが国で使われている確率紙の場合であって、海外では縦軸と横軸が逆になっているものが多い。なぜこのような違いが起きたのか定かでないが、わが国の確率紙のように変数 (データ) を横軸にとる方が馴染み易い。

⁵ これは一様分布を想定することに等しい。

⁶ この公式は、わが国で長い間 “Thomas 公式 (Thomas plot)” と呼ばれてきたものであるが、このプロットイング・ポジションを初めて提唱した Weibull (1939) の名にちなんで、近年ではこのように呼び変えられている。

(1914) によって提案されたもので、Weibull 公式とともにしばしば用いられている。この式は解析的なあてはめの方法によって得られる解に近い値を与えることが経験的に知られている。

本章では、実データに基づいて、これらの公式を比較する。

1.5.2 平分線の線引きの客観化 — 最小二乗法

次に、Step 3 の手順においては、平分線の引き方が問題である。平分線を目視 (eye-fit) によって引く場合には、主観が入り不正確なものとなる。特に、計画上重要な両端部大きなズレが生じる。

そこで、グラフィック・ディスプレイ画面上に確率紙を実現し、データプロットの煩雑さ・不正確さを回避するとともに、最小二乗法により平分線の線引きの客観化を図る。

変数 X の値を何らかの形に変換したもの (変換変量) を Y , それを規準化した変量 (標準変量, reduced or standardized variate) を S と記すと、

$$Y = h(X) \quad (1.4)$$

$$S = g(Y) \quad (1.5)$$

ここに、 h, g はそれぞれ X, Y の単調増加 (あるいは減少) 関数。

確率紙上で仮の横軸に Y , 仮の縦軸に S をとると、 Y 軸, S 軸は普通目盛りとなり、その確率紙に対応する確率分布は直線

$$S = a + bY \quad (1.6)$$

で表されることになる。

順序統計量 x_1, x_2, \dots, x_N が与えられたとき、それに対応する Y, S を y_i, s_i ($i = 1, \dots, N$) と記す。プロットイング・ポジション p_i に対応する標準変量を s_i^* と記すと、

$$s_i^* = g(F^{-1}(p_i)) \quad (1.7)$$

ただし、 F は、もとの分布関数 $F(x)$ を $F(y)$ に読み替えたものであり、 F^{-1} は F の逆関数である。

さて、 $Y-S$ 平面上に、点 (y_i, s_i^*) が N 個プロットされているとき、それらにあてはめる直線は、最小二乗法によって求められる。すなわち、 ε を誤差項として

$$S = a + bY + \varepsilon \quad (1.8)$$

とおき、

$$\xi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \rightarrow \min \quad (1.9)$$

として、 a, b の推定値 \hat{a}, \hat{b} を求める。ここに、 ε_i は $s_i = a + by_i$ と s_i^* との差である。こうして、平分線

$$S = \hat{a} + \hat{b}Y \quad (1.10)$$

が客観的に決定される (ただし、(1.7) 式より明らかなように、プロットイング・ポジション公式に依存する)。

最小二乗法のもう一つの方法は、(1.8) 式の代わりに

$$Y = c + dS + \varepsilon' \quad (1.11)$$

として Y 軸方向の誤差を最小にするものが考えられる。(1.4) 式の変換を行わない場合 (すなわち、 $Y = X$) には、観測値 x_i の誤差を最小にするという意味で妥当である。しかし、たとえば、対数変換のような非線形変換を施したときは、何も変換しないと誤差 ε' の評価の度合が異なることになる。Gumbel 分布と対数 Gumbel 分布の適合度を、このようにしてそれぞれ最小化した誤差二乗和によって単純に比較することはできないわけである。(1.8) 式のような形式での標準変量に関する最小二乗法の方が、変数変換の方法にかかわらずいつも同じやり方で実行でき、また、(1.9) 式の ξ^2 により単純に適合度の評価もできるという点で好ましいと言える。この最小二乗法によって、図式推定法が客観化されることになる。

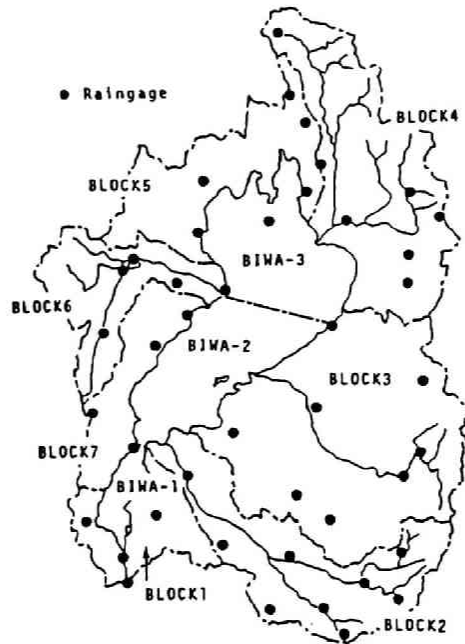


図 1.1: 琵琶湖流域 (3,848 km²)

1.5.3 確率分布モデルの適合性の評価規準

1組の水文データをいくつかの確率紙にプロットしたとき、そのうちの確率紙のプロットが最も直線性が高いかという問題、すなわち分布の適合性の問題がある。この点に関しては、かなり曖昧な取り扱いがなされてきたようである。つまり、確率紙による頻度分析（確率評価）はあくまで簡略推定に過ぎないとして、その適合・不適合を目視などの主観的判断によって行う場合がほとんどであった。

1.5.2 のようにして決定される平分線の場合、(1.9) 式で最小化された平均二乗誤差 ξ_{\min}^2 がその適合度の指標となりうる。しかしながら、分布形によって標準変量 S のとりうる値の範囲が異なるので、異なる分布形相互の適合度の比較のためには、 ξ_{\min}^2 を何らかの形で標準化してやる必要がある。そこで、筆者らは、次式のような標準化された適合度の評価規準 SLSC（標準最小二乗規準, Standard Least-Square Criteion for goodness of fit）を提案した（高棹・宝・清水（1986））。

$$\text{SLSC} = \frac{\sqrt{\xi_{\min}^2}}{|s_{1-p} - s_p|} \quad (1.12)$$

ここに、 s_{1-p}, s_p は、それぞれ非超過確率 $1-p, p$ に対応する標準変量である。データの個数が 100 個程度以下であればプロット点は非超過確率が 0.01 と 0.99 の範囲にほとんど入ることから、 p の値は、通常 $p = 0.01$ とする。つまり、確率紙上のその範囲の標準変量の縦距（(1.12) 式の分母）を標準化のために導入したのである。後で示されるように、SLSC は異なる分布形の適合度を比較するための客観的な評価規準として有用である。

1.6 琵琶湖流域水文データへの適用

上記のような図式推定法を用いて、琵琶湖流域の降水量、琵琶湖への流入量について、五つの 2 母数頻度解析モデルの適合性を系統的に調べ、季節性・地域性による分布形の違いを明らかにするとともに、プロットング・ポジション公式による解の差異を最尤法とも比較しながら検討する（高棹・宝・清水（1986））。原データは、琵琶湖流域における 43 地点の降水観測所（図 1.1）の日単位の降水量、瀬田川洗堰流量、京都疎水（第 1、第 2）および宇治発電所への取水量、鳥居川量水標および彦根水位観測所の水位、湖面蒸発量などである。これらより流域平均降水量（算術平均）と琵琶湖流入量を算定し、頻度解析を行った。

1.6.1 対象とする確率分布モデル

通常よく用いられる次の五つの確率分布モデルを対象とする。これらはすべて母数を2個もつ。

a) 正規分布

正規分布 (normal distribution) の確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (1.13)$$

ここに、 x は対象とする確率変数の値で、 μ, σ は分布の母数であって、これら二つは、それぞれ変数の平均値と標準偏差を表している。正規分布は、簡単に、 $N(\mu, \sigma^2)$ と書かれる⁷。確率変数 X を

$$S = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (1.14)$$

と変換した変数 S は、 $N(0, 1)$ なる標準正規分布に従い、標準正規確率変数という。(1.14) 式のように標準化したものを、以下では、単に標準変量 (規準化変量, standardized or reduced variate) と呼ぶ。標準正規分布の累積分布関数は、 $\Phi(s)$ なる記号を用いて表すことが多く、

$$F(s) = \Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^s e^{-(1/2)t^2} dt \quad (1.15)$$

である。

b) 対数正規分布

正の値をとる変量 X に対数変換をした変量 $Y = \log X$ が正規分布に従うとき、 X は対数正規分布 (log-normal distribution) に従うという。このとき、変換変数 Y は、正規分布 $N(\zeta, \lambda)$ に従い、2 個の母数 ζ, λ をもつ。

$$f(x) = \frac{1}{x\lambda\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log x - \zeta)^2}{2\lambda^2}\right\} \quad (1.16)$$

(1.14) 式と同様に、

$$S = \frac{\log X - \zeta}{\lambda} \quad (1.17)$$

とおけば、分布関数は (1.15) 式で与えられる。

c) 指数分布

指数分布 (exponential distribution) の確率密度関数は

$$f(x) = \rho \exp\{-\rho(x - c)\} \quad (1.18)$$

累積分布関数は

$$F(x) = 1 - \exp\{-\rho(x - c)\} \quad (1.19)$$

標準変量は

$$S = \rho(X - c) \quad (1.20)$$

d) Gumbel 分布

Gumbel 分布は、二重指数分布または最大値に関する第 I 種極値分布とも呼ばれる。その確率密度関数は

$$f(x) = \alpha \exp[-\alpha(x - u) - \exp\{-\alpha(x - u)\}] \quad (1.21)$$

累積分布関数は

$$F(x) = \exp[-\exp\{-\alpha(x - u)\}] \quad (1.22)$$

で、標準変量は

$$S = \alpha(X - u) \quad (1.23)$$

⁷ $N(\mu, \sigma)$ と書かれることもある。

表 1.1: SLSC の分母の値

Distribution	Value
Normal	4.66
Log-normal	4.66
Exponential	4.60
Gumbel	6.13
Log-Gumbel	6.13

表 1.2: 琵琶湖流域年降水量 (1912–1981) に対する SLSC 値

Plot. F.	Normal	Log-normal	Exponential	Gumbel	Log-Gumbel
Weibull	0.01951	0.02450	0.07528	0.04243	0.05599
Hazen	0.02240	0.02644	0.08882	0.05165	0.06516
Gringorten	0.02191	0.02629	0.08664	0.05011	0.06365
Blom	0.02144	0.02588	0.08451	0.04863	0.06219
Cunnane	0.02148	0.02569	0.08530	0.04918	0.06274
Adamowski	0.02060	0.02544	0.08096	0.04619	0.05978

e) 対数 Gumbel 分布

正の値をとる変量 X に対数変換をした変量 $Y = \log X$ が Gumbel 分布に従うとき、 X は対数 Gumbel 分布 (対数極値分布) に従うという。確率密度関数 $f(y)$ 、累積分布関数 $F(y)$ はそれぞれ、(1.21) 式、(1.22) 式と同じ形式で与えられる。

これらの五つの分布に対する SLSC の分母 $|s_{0.99} - s_{0.01}|$ の値は 表 1.1 のようになる。

1.6.2 図式推定法による適合度の評価

1912 年から 1981 年の 70 年間の年降水量 (全流域平均) の系列に対して図式推定法を適用した。各分布、各プロットイング・ポジション公式を用いた場合の SLSC 値を表 1.2 に示した。図 1.2 にプロットを示す。実線は、最小二乗法で求めた平分線である。SLSC が 0.02 程度であれば、プロットがほぼ直線上に並んでいると言える。全流域平均の年降水量は正規分布に従うとみてよい (図 1.2(a), SLSC=0.02148)。対数正規分布 (図 1.2(b), SLSC=0.02569) もかなり適合度は良いが、正規分布と比べると平分線の両端部で適合度が劣る。SLSC が 0.04 以上になると、適合度がかなり悪くなる (図 1.2(c)~(e))。

1.6.3 図式推定法と最尤法の比較 — 極値降水量を例として

所与のデータに確率分布モデルをあてはめるのに、図式推定法ではなく積率法や最尤法などのいわゆる解析的な方法を用いることも多い。これらの解析的な方法は、一般に、データ数が多い (数十個以上) 場合に有効であると言われている。さて、確率分布モデルのあてはめの良否の評価規準としてこれまでに提案されているものに Kullback-Leibler 情報量 (Kullback (1959)) や赤池の情報量規準 (AIC, Akaike (1974)) があり、今の場合、母数の個数がすべて同じ (2 個) であるから、対数尤度をそれらの代用とすることができる (坂本ら (1983))。ここでは、最尤法を用いて異なる分布のあてはめを行い、共通の尺度 (対数尤度) でそれらの適合度を比較することにする。

最尤法の概略は以下のようなものである。 N 個のデータ x_1, x_2, \dots, x_N が与えられたとき、尤度関数 $L(\theta)$ は次式で定義される。

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i; \theta) \quad (1.24)$$

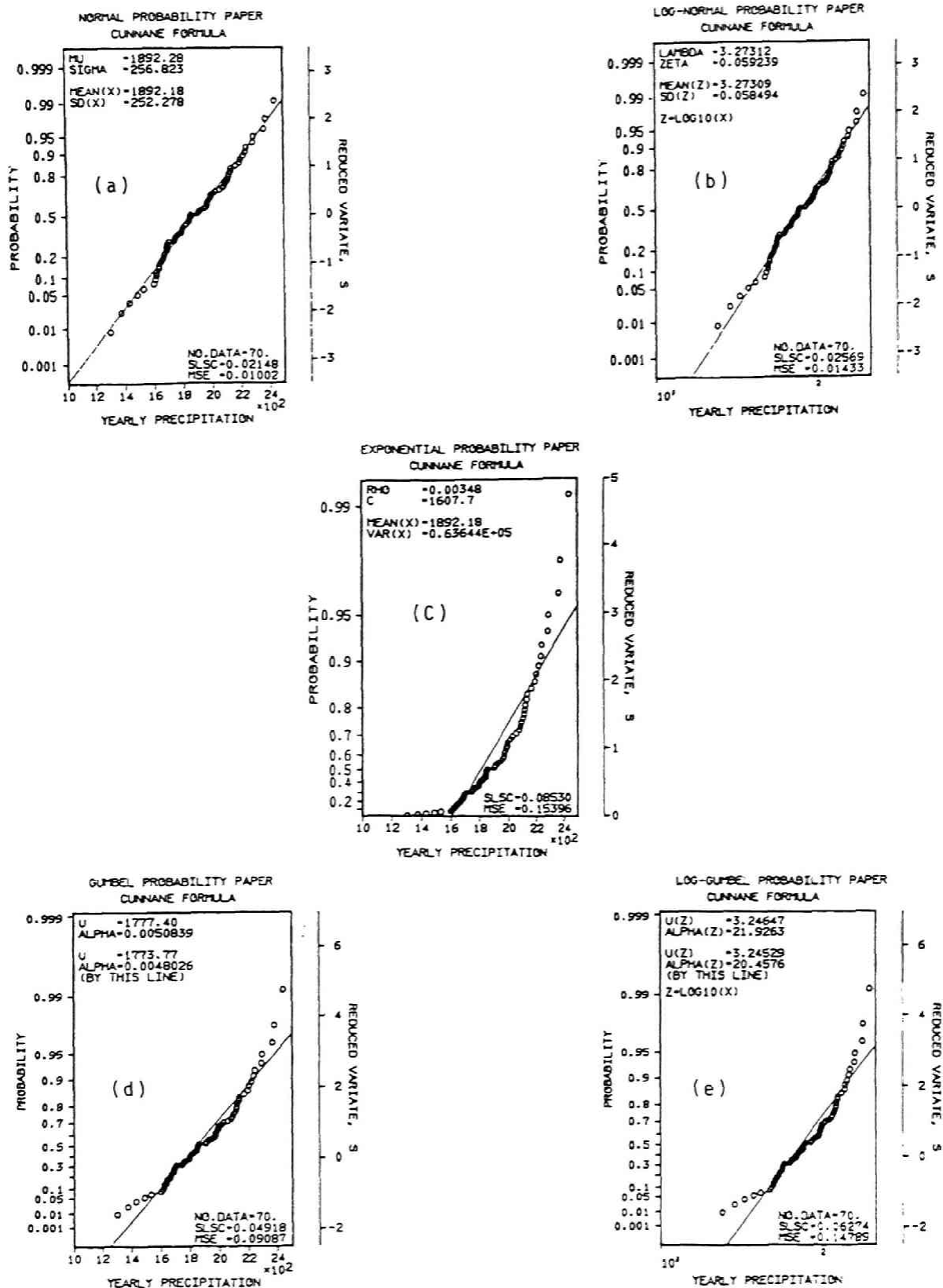


図 1.2: 琵琶湖流域年降水量 (1912-1981) のプロット (Cunnane 公式)

[(a) 正規分布, (b) 対数正規分布, (c) 指数分布, (d) Gumbel 分布, (e) 対数 Gumbel 分布]

表 1.3: 琵琶湖流域の年最大 m 日降水量 (1912-1981) に対する SLSC 値

Precipitation	Plot, F.	Normal	Log-normal	Exponential	Gumbel	Log-Gumbel
1-day (daily)	Weibull	0.05886	0.02294	0.02642	0.02134	0.02846
	Hazen	0.06093	0.02459	0.03673	0.02240	0.03724
	Gringorten	0.06039	0.02415	0.03489	0.02191	0.03573
	Blom	0.06020	0.02392	0.03316	0.02156	0.03428
	Cunnane	0.06054	0.02411	0.03380	0.02167	0.03482
	Adamowski	0.05946	0.02329	0.03041	0.02123	0.03195
2-day	Weibull	0.05404	0.02213	0.03254	0.01941	0.03577
	Hazen	0.05572	0.02482	0.04037	0.01829	0.04399
	Gringorten	0.05523	0.02427	0.03895	0.01820	0.04260
	Blom	0.05507	0.02383	0.03763	0.01823	0.04127
	Cunnane	0.05545	0.02405	0.03812	0.01820	0.04177
	Adamowski	0.05448	0.02298	0.03555	0.01850	0.03910
3-day	Weibull	0.04926	0.01468	0.03385	0.01548	0.03620
	Hazen	0.05189	0.01872	0.04638	0.02214	0.04589
	Gringorten	0.05123	0.01791	0.04425	0.02077	0.04426
	Blom	0.05099	0.01738	0.04221	0.01953	0.04270
	Cunnane	0.05131	0.01752	0.04296	0.01998	0.04328
	Adamowski	0.05006	0.01605	0.03889	0.01768	0.04013

ここに, $f(x; \theta)$ は確率密度関数であり, θ は母数のベクトルである。尤度関数は, その対数をとった対数尤度 (log-likelihood)

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^N \ln f(x_i; \theta) \quad (1.25)$$

の形式で用いられる。最尤法は $L(\hat{\theta}) > L(\theta)$ なる $\hat{\theta}$ を母数推定値とする方法である。すなわち, 対数尤度を θ で偏微分して 0 と置いた連立方程式

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta) = 0 \quad (1.26)$$

を解けばよい。一般に, この対数尤度を母数で偏微分すると非線形項が生じるため, 複雑な反復計算が必要である。

正規分布, 対数正規分布の母数の最尤推定値は, 原水流量あるいはその対数変換量の平均値と標準偏差という形で陽に与えられる。Gumbel 分布の場合は,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \frac{\sum_{i=1}^N x_i \exp(-\alpha x_i)}{\sum_{i=1}^N \exp(-\alpha x_i)} \quad (1.27)$$

$$u = -\frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp(-\alpha x_i) \right\} \quad (1.28)$$

という陰形式で与えられる (Kimball; Gumbel (1958) の 6.2.5 参照) ので, 数値的に解くことになる。ここでは, 対数尤度を目的関数として直接探索法 (格子点法) により, 目的関数を最大とするような α, u を求める。対数 Gumbel 分布の場合も同様。

1912 年から 1981 年の 70 年間の年最大 m 日降水量 ($m = 1, 2, 3$) を用いて, 図式推定法の精度を最尤法との対比により検討してみよう。

表 1.3 に年最大 m 日降水量についての SLSC 値を示した。 $m = 1, 2, 3$ のどの場合も Gumbel 分布の SLSC が 0.02 程度の値をとり, 理論どうり極値データに有効な分布形であるといえよう。対数正規分布もかなり適合するようである。表 1.4 には, 正規分布, 対数正規分布, Gumbel 分布, 対数 Gumbel 分布に最尤法を適用した場合の最大対数尤度 (maximum log-likelihood, MLL) を示した。対数正規分布と Gumbel 分布は他の二つの分布よりも大きな MLL の値を示しており適合度が優れていることがわかる。SLSC による 表 1.3 の結果も同様の傾向を示している。さて, 詳しく見ると, SLSC の値は, $m = 1, 2$ のときは Gumbel 分布が, $m = 3$ のときは対数正規分布が

表 1.4: 年最大 m 日降水量に対する最大対数尤度

Precipitation	Normal	Log-normal	Gumbel	Log-Gumbel
1-day (daily)	-342.86	-334.59	-334.38*	-335.56
2-day	-364.45	-357.36*	-357.54	-359.05
3-day	-373.30	-366.85*	-367.03	-369.37

最小となる。一方, MLL は, $m = 1$ のときは Gumbel 分布, $m = 2, 3$ のときは対数正規分布がいちばん大きな値をとる。2 日降水量の場合には, SLSC による評価結果と MLL によるそれとが異なる。しかしながら, SLSC についても MLL についても, 対数正規分布と Gumbel 分布はともに近い値をとっており, どちらの分布の適合度も同程度と見ることができる。

確率水文量の推定という観点からもう少し検討してみよう。対数正規分布, Gumbel 分布の場合のリターンビリオド 50, 100, 200 年に対応する確率 m 日降水量を図式推定法および最尤法について求めて表 1.5 に示した。まず, この表より 100 年確率では日降水量が 190mm 程度, 2 日降水量が 260mm 程度, 3 日降水量が 300mm 程度であることなどがわかる。図式推定法と最尤法との比較では前者の方が大きいめの確率水文量の値を与える。対数正規分布と Gumbel 分布が同程度の適合度評価を与えられたとき, 求められる確率水文量は, Gumbel 分布 (図式推定法) の場合が最も大きく, 以下, 対数正規分布 (図式推定法), 対数正規分布 (最尤法), Gumbel 分布 (最尤法) の順に小さくなってゆく。対数正規分布においては, 図式推定法と最尤法との求められる確率水文量の値の差が, Gumbel 分布の場合よりも小さい。六つのプロット・ポジション公式を比べると, Weibull 公式は, 従来から言われているように安全側の確率水文量を与える (これが過大評価であるかどうかは, 後の検討で明らかになる)。また, 対数正規分布と Gumbel 分布どちらに対しても Hazen 公式が最尤法に最も近い確率水文量を与える。

図 1.3, 図 1.4 にプロットを示した。実線は最小二乗法で求めた平分線, 破線は最尤法により求めた分布直線である。図 1.3 では, 六つのプロット・ポジション公式の両極とも言える Weibull 公式 (上段の図) と Hazen 公式とを比べた。他の四つの公式は, ω の値に応じて, これら二つの中間に位置する。図 1.3, 表 1.5 に示されるとおり, 特に Gumbel 分布の場合, Weibull 公式を用いた図式推定法の解が最尤法のそれとかなり異なることがわかる。図 1.4 には 2 日降水量, 3 日降水量の Hazen 公式によるプロットを示す。

1.6.4 降水量および流入量の確率分布

琵琶湖流域を, 図 1.1 のように, 10 個の部分流域 (BLOCK1~7, BIWA-1~3) に分け, 各部分流域の面積平均降水量を算術平均法により算出した。湖面降水量の算出には周辺の観測所の値を用いた。流域全体あるいは各部分流域の年・月降水量について図式推定法を適用し, SLSC を求めた。それぞれ最小の SLSC を与える分布形を見出し表 1.6 に整理した。この表から, 降水量の季節性・地域性を調べる。また, b) では流入量についても同様の検討を行う。表 1.6 において, * 印は $0.03 \leq \text{SLSC} < 0.04$ であること, すなわち適合度が必ずしも十分でないことを示しており, ** 印は $0.04 \leq \text{SLSC}$ であること, すなわち適合度が悪く他の分布形のあてはめを考慮しなければならないことを示している。

a) 降水量の季節性・地域性について

(1) 流域全体の降水量の季節性

琵琶湖流域全体の月降水量について各分布の SLSC を求めた。Hazen 公式を用いた場合の SLSC を表 1.7 に示す。SLSC が最も小さくなる分布形が表 1.6 の下から 2 段目に示されている。1, 3 月の月降水量は正規分布, 2, 12 月は対数正規分布, その他の月降水量は Gumbel 分布の適合性が良い。ただし, 7, 11 月は少し適合度が悪い (それぞれ $\text{SLSC} = 0.03247, 0.03172$; 表 1.7)。冬季とそれ以外とで適合する分布形が異なる。

(2) 年降水量の地域性

BLOCK1, 2, 3, 7, BIWA-1 の年降水量は正規分布, BLOCK4, 5, 6, BIWA-2, 3 は対数正規分布に従う。つまりこれは琵琶湖流域が, 降水量の従う分布形の相違によって, 南北に二分されることを示している。湖北と湖南で年降水量の特性が明らかに異なるようである。

表 1.5: 年最大 m 日降水量の 50, 100, 200 年確率推定値

Precipitation	Estimation method	Log-normal			Gumbel		
		Return period (years)			Return period (years)		
		50	100	200	50	100	200
1-day (daily)	Weibull	179.2	197.6	215.7	184.6	203.9	223.0
	Hazen	173.8	190.8	207.5	178.8	196.9	215.0
	Gringorten	174.5	191.7	208.6	179.6	197.9	216.1
	Blom	175.2	192.6	209.6	180.5	198.9	217.2
	Cunnane	175.0	192.4	209.3	180.1	198.5	216.8
	Adamowski	176.7	194.5	211.9	181.9	200.6	219.3
	MLE	172.7	189.5	205.9	170.9	187.5	204.1
2-day	Weibull	245.1	271.5	297.4	248.5	274.7	300.7
	Hazen	237.5	261.9	285.8	240.5	265.1	289.6
	Gringorten	238.5	263.2	287.4	241.6	266.4	291.2
	Blom	239.5	264.4	288.8	242.8	267.8	292.7
	Cunnane	239.2	264.1	288.4	242.4	267.3	292.1
	Adamowski	241.6	267.0	292.0	244.8	270.2	295.6
	MLE	236.0	260.0	282.2	233.2	256.4	279.6
3-day	Weibull	279.4	309.5	339.3	281.9	311.5	341.0
	Hazen	270.7	298.7	326.1	273.3	301.3	329.2
	Gringorten	271.8	300.1	327.8	274.5	302.7	330.8
	Blom	272.9	301.5	329.5	275.7	304.1	332.5
	Cunnane	272.6	301.1	329.0	275.3	303.6	331.8
	Adamowski	275.3	304.5	333.1	277.9	306.8	335.5
	MLE	269.6	297.3	324.4	267.2	294.0	320.8

表 1.6: 流域平均降水量と流入量に対して最小の SLSC 値を与える確率分布

	Basins	Yearly	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
Areal precipitation	BLOCK 1	N	G	G*	N	G	G	G	N*	G	G	G	N	N
	BLOCK 2	N	G	LN	N	G	G	G	G	G	LN*	LN	G	N
	BLOCK 3	N	N	LN	N	LN	G	G	G	G	G	LN	G	LN
	BLOCK 4	LN	E	LN**	LN	LN	G	N*	G*	G	G	G	LN	LN
	BLOCK 5	LN	LN	N	G	G	G	G	G	G	G	LN*	N	LN
	BLOCK 6	LN	N	G	N*	G	N*	LN	G	E*	LN	LN	G	G*
	BLOCK 7	N	G	LN**	G	LN	LN	LN	G*	LN	G*	G	N	G
	BIWA-1	N*	G	G	N	G	G	G	N*	G	G*	G	N	N
	BIWA-2	LN	G*	LN	G*	G*	LN	G*	G*	G	G	G	N*	G
	BIWA-3	LN	N	N	G	G	G	G*	G	G	G	G	N	G
	Whole basin	N	N	LN	N	G	G	G	G*	G	G	G	G*	LN
Inflow		N	N*	LN**	N	LN	LN**	E*	G	G*	G*	LN*	N	N**

N : Normal, LN : Log-normal, E : Exponential, G : Gumbel ;

* indicates $0.03 \leq SLSC < 0.04$, ** indicates $0.04 \leq SLSC$

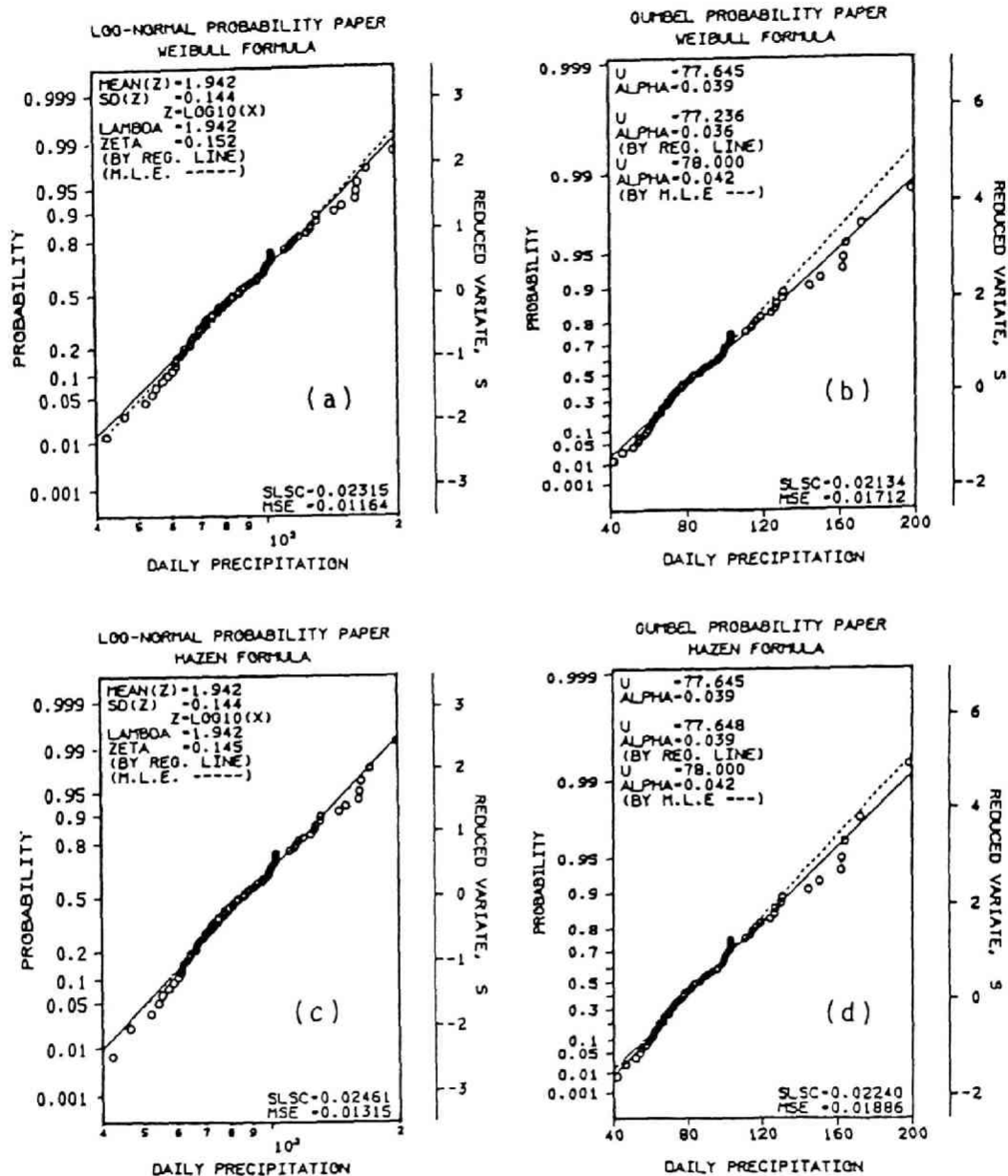


図 1.3: 琵琶湖流域年最大日降水量 (1912-1981) のプロット

[(a) 対数正規分布 (Weibull 公式), (b) Gumbel 分布 (Weibull 公式),
(c) 対数正規分布 (Hazen 公式), (d) Gumbel 分布 (Hazen 公式)]

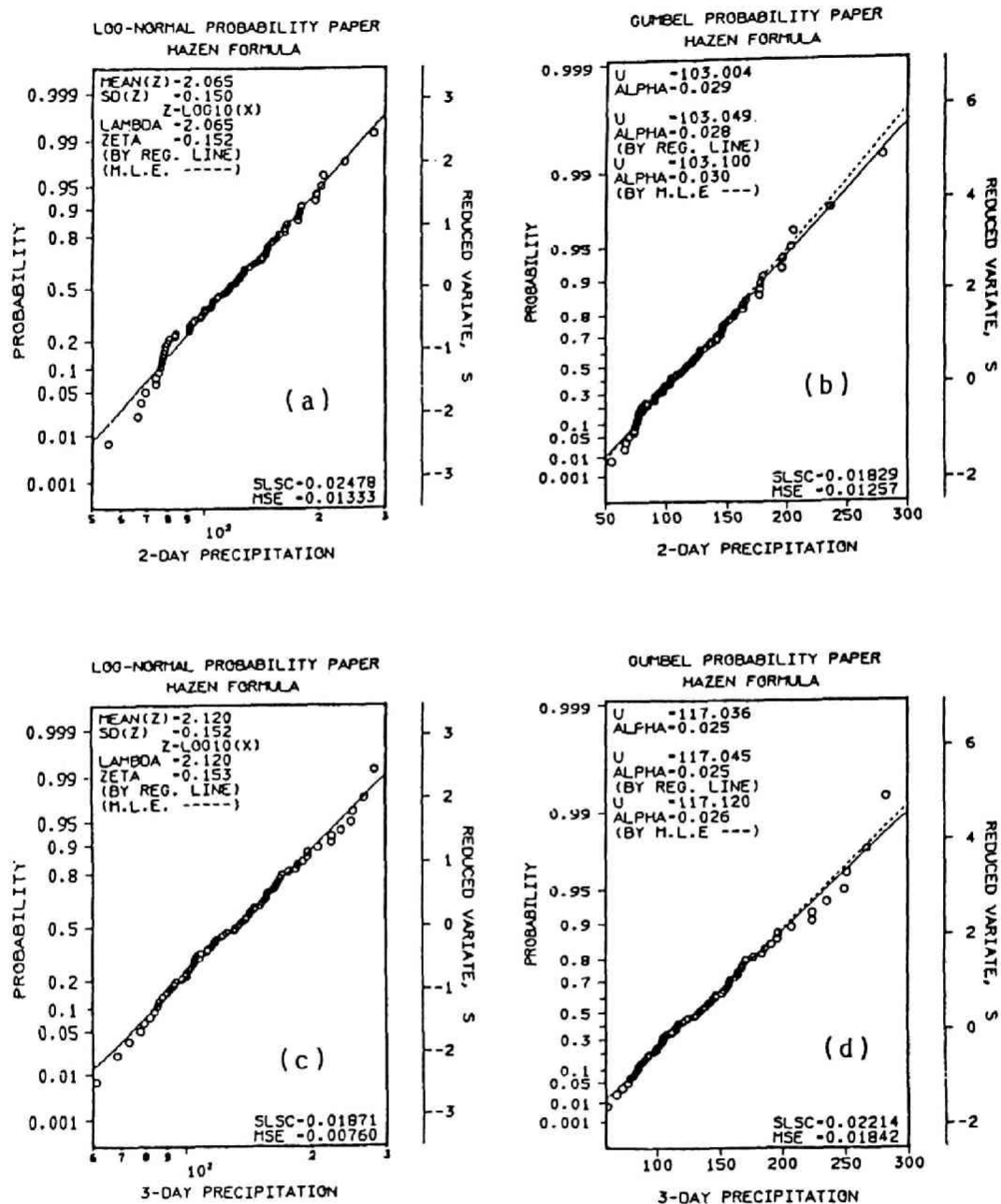


図 1.4: 琵琶湖流域年最大 2, 3 日降水量 (1912-1981) のプロット (Hazen 公式)

[2 日降水量に対する (a) 対数正規分布, (b) Gumbel 分布;
3 日降水量に対する (c) 対数正規分布, (d) Gumbel 分布]

表 1.7: 月降水量に対する SLSC 値 (Hazen 公式)

Month	Normal	Log-normal	Exponential	Gumbel	Log-Gumbel
Jan	0.01575	0.04093	0.08709	0.04817	0.08149
Feb	0.04172	0.02023	0.05960	0.02828	0.05240
Mar	0.02720	0.03215	0.04878	0.03103	0.06978
Apr	0.04582	0.02936	0.05886	0.02818	0.06075
May	0.03707	0.02620	0.05845	0.02256	0.06685
Jun	0.03921	0.03146	0.05728	0.02838	0.07276
Jul	0.03917	0.04149	0.06418	0.03247	0.08239
Aug	0.05348	0.04098	0.04112	0.01685	0.07625
Sep	0.04568	0.03077	0.05392	0.02462	0.07156
Oct	0.05462	0.02016	0.04193	0.01863	0.05875
Nov	0.03232	0.04240	0.06695	0.03172	0.07843
Dec	0.03621	0.02651	0.06380	0.02775	0.06433

表 1.8: 月および年流入量に対する SLSC 値 (Hazen 公式)

Month	Normal	Log-normal	Exponential	Gumbel	Log-Gumbel
Jan	0.03239	0.05274	0.08943	0.05287	0.08682
Feb	0.08187	0.04382	0.05219	0.04915	0.04619
Mar	0.02647	0.03185	0.06930	0.03169	0.06949
Apr	0.04920	0.02195	0.05469	0.02711	0.04853
May	0.12015	0.06487	0.09801	0.09707	0.08438
Jun	0.08945	0.03482	0.03281	0.04743	0.05627
Jul	0.03757	0.04542	0.05804	0.02414	0.08313
Aug	0.07582	0.04093	0.04009	0.03839	0.07549
Sep	0.05751	0.03380	0.05102	0.03292	0.06331
Oct	0.07780	0.03117	0.03943	0.03970	0.06102
Nov	0.02324	0.05083	0.08231	0.04451	0.08863
Dec	0.04239	0.09014	0.11725	0.08023	0.12102
Yearly	0.03167	0.03578	0.07142	0.03643	0.06543

(3) 月降水量

Gumbel 分布が適合する場合が半分以上を占め、そのほとんどの場合において SLSC は 0.02 前後の値を示しており、かなり適合度は良いと言える。BLOCK4 と BLOCK7 の 2 月は、最小の SLSC が 0.04 以上 (** 印) の値を示し、適合度がかなり悪かった。他の分布のあてはめを試みる必要がある。* 印 ($0.03 \leq \text{SLSC} < 0.04$) も散見される。これらについても他の分布形のあてはめを試みる方が望ましいが、妥協できない (プロット点が直線上に並んでいるとみなせたくない) 程度の適合度である。図 1.5 に 1 月と 6 月の月降水量のプロットを示した。これらは適合度の良い例である。

結局、全流域・各部分流域において、各月の降水量の適合する分布はそれぞれ異なり、同一の分布形を画一的に適用できないことを示唆している。ただし、ここで適用した分布はごく限られたものであり、さらなる検討を要する。

b) 流入量について

年流入量・月流入量に対する SLSC 値を表 1.8 に示す。3, 4, 7, 11 月は適合度が良いが、最小の SLSC を与える分布はそれぞれ正規、対数正規、Gumbel、正規というふうに異なる。2, 5, 12 月の適合度は悪く ($0.04 \leq \text{SLSC}$)。他の分布形を考慮する必要がある。1, 6, 8, 9, 10 月もあり良くない。要するに、月によって適合する分布がかな

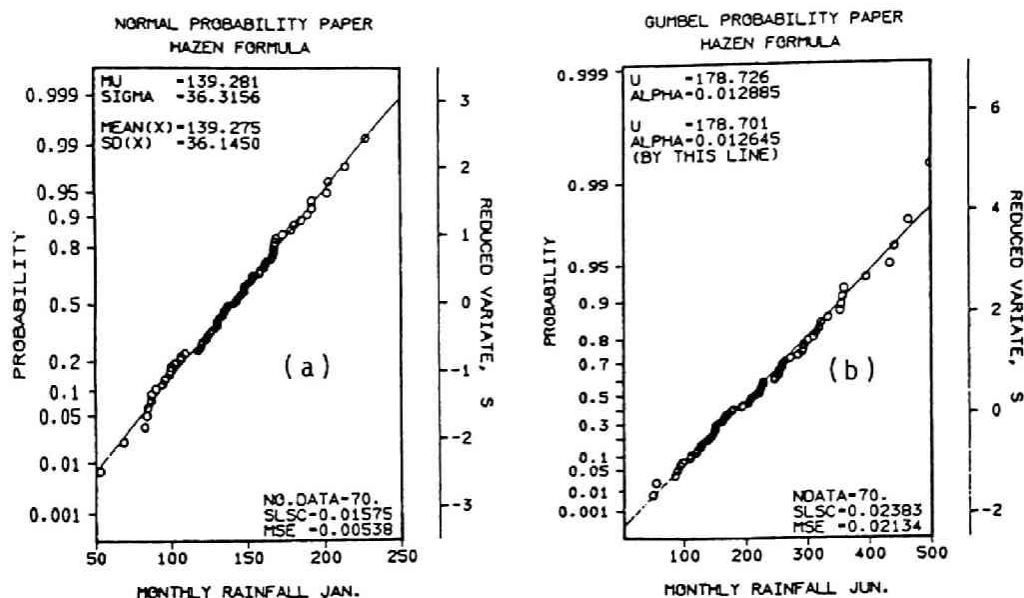


図 1.5: 琵琶湖流域の月降水量 (1912-1981) のプロット (Hazen 公式)

[(a) 1 月の降水量に対する正規分布, (b) 6 月の降水量に対する Gumbel 分布]

り異なるようである。

図 1.6 に 6 月の流入量のプロットを示す。SLSC はわずかに指数分布の方が小さいが、超過確率の小さい部分での適合度は対数正規分布の方が良い。指数分布を取り扱う際には、超過確率の大きい部分でプロット点が密集するので注意を要する。このように、同程度の SLSC 値をもつ分布が他にあれば、そちらの方も検討する必要がある。

1.7 適合性の指標としての SLSC の有用性

SLSC 以外の評価規準、たとえば最大対数尤度などは異なる分布形相互の比較 (相対評価) のために有力な規準となりうる。しかしながら、最大対数尤度の値だけでは単独の分布の適合度の評価 (絶対評価) はできない。一方、SLSC は、異なる分布形に対する適合度の統一的規準として有用であるばかりでなく、絶対評価のための指標としても用いることができる。特に 2 母数分布の場合には計算も簡便である。

絶対的な適合度の評価値としては、 $SLSC \approx 0.02$ である。これまでに示してきたいくつかの図からもわかるように、この程度の値であれば十分に満足すべき適合性が得られている。0.02 という値の解釈は、プロット点の平分線からの偏差が、平均して確率紙の縦軸の長さの 2% 程度に収まっていることを示している。

1.8 図式推定法による確率分布モデルのあてはめの手順のまとめ

以上の考察から、図式推定法 (最小二乗法) による確率分布モデルのあてはめの手順として以下のようなものを推奨することができる。

Step 1) 確率分布モデルをいくつか選定する。

Step 2) プロッティング・ポジション公式として Hazen 公式を適用し、それぞれの分布について母数の推定 (最小二乗法) を行う。

Step 3) (1.12) 式により、SLSC を求める。

Step 4) $SLSC \approx 0.02$ となる分布を選ぶ。このような分布が見つからない場合には Step 1 に戻る。

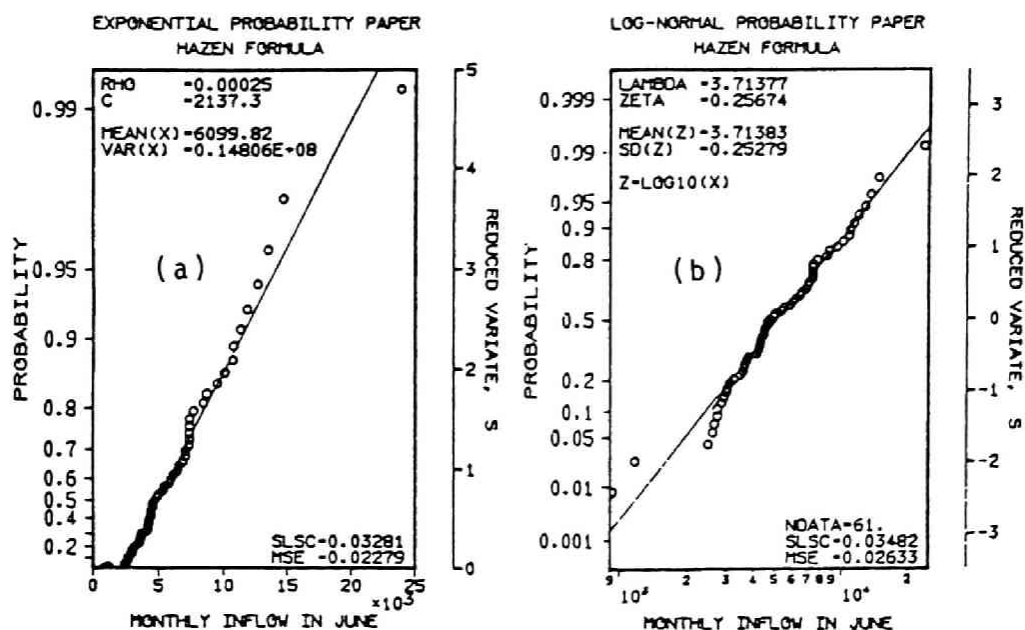


図 1.6: 琵琶湖流域 6 月の流入量 (1914-1974) のプロット (Hazen 公式) [(a) 指数分布, (b) 対数正規分布]

Step 5) $SLSC \approx 0.02$ となる分布が複数個ある場合には、それらに対して何らかの別の評価規準によって最も良い分布を選択しなければならない。

[注意]— 変数 X (あるいはその変換変数 Y) とその標準変量 S とが (1.6) 式のような線形関係で表せない確率分布モデルや母数が 3 個以上ある確率分布モデルに対してもこの手順は適用できる。その場合、Step 2 では非線形最小二乗法を用い、最小化された二乗誤差を (1.12) 式に代入して $SLSC$ が求められる。結局、ここで示した確率分布モデルのあてはめの方法は、“標準変量最小二乗法” (あるいは“ $SLSC$ 法”) とでも呼ぶべきものである。この方法は、確率紙の存在する確率分布モデルに対しては、図式推定法の規範的取り扱いにほかならない。

Step5 において、最小の $SLSC$ を与える分布が、他の評価規準でも最良と判定されればあまり問題はない。しかしながら、第 3 章で示すように、適合度の評価規準によって最良の分布が異なることがある。こうした場合には、適合度以外の評価規準が必要となる。この問題については、第 3 章で詳しく論じる。

また、ここでは、6 種のプロット・ポジション公式を用いた最小二乗法と最尤法の比較を行ったが、前述のように、母数推定法は他にも多数提案されている。次の第 2 章では、水文頻度解析でしばしば用いられる 3 母数対数正規分布、Gumbel 分布、一般化極値分布について、Monte Carlo シミュレーションにより、母数推定法の比較評価を行う。

1.9 結語

水文頻度解析の意義と問題点について概要を述べた後、琵琶湖流域の水文データを例として、具体的な手法とその問題点を明らかにした。ここでは、特に最も基本的な 1 変数の 2 母数確率分布モデルの図式推定法 (最小二乗法) によるあてはめとその精度について検討した。得られた成果は以下のとおりである。

1. コンピュータを援用してグラフィック デisplay 画面上に確率紙を実現し、データのプロットおよび平分線の線引きを精密化・自動化した。これにより種々のデータの分析が容易にできるようになった。
2. 6 種のプロット・ポジション公式を比較した結果、ここでの適用例では Hazen 公式がつねに最尤法の解に最も近い解を与えることがわかった。さらに適用例を増やして検討する必要があるが、図式推定法の場合、Hazen 公式を用いるのがよい。
3. 図式推定法と最尤法との比較では、図式推定法が計画上安全側の解を与える。両者の解の差は分布形ごとに異なるので注意しなければならない。たとえば、対数正規分布と Gumbel 分布がデータに対して同程度の適

合度を示したとき、対数正規分布に図式推定法と最尤法を適用した場合の確率水文量の値の差は、Gumbel 分布の場合よりも小さい。対数正規分布の場合、図式推定法は最尤法のよい近似を与える。

4. 適合度の評価規準 (SLSC) を提案した。この評価規準は、算定が簡単で、異なる分布形相互の適合度比較 (相対評価) だけでなく、絶対評価にも用いることができる。SLSC \approx 0.02 であれば十分な適合性を示していると言える。SLSC $>$ 0.03であれば、他の分布形へのあてはめを試みた方がよい。本章では、2 母数の確率分布で、 Y と S が線形関係となるような場合への適用を示したが、1.8 でも記したように、母数の個数が増えても、また、 Y と S が線形関係に表せない場合にも、母数を最小二乗法により推定する場合には、直ちに SLSC を適用することができる。
5. ここで示した手法により、琵琶湖流域の降水量データおよび琵琶湖への流入量データが従う分布形を調べ、その地域性・季節性を明らかにした。また、地域ごと・季節ごとに従う分布が異なることがわかった。このことは、同じ範疇に属する水文量 (たとえば、月降水量) であっても、同一の分布を画一的に適用できないことを示唆している。表 1.6 に示したように、ここで検討した 5 種の分布では十分な適合性の得られなかったものもあり、それらについては別の分布を考慮しなければならない。

参 考 文 献

- Adamowski, K. (1981): Plotting Formula for Flood Frequency, Water Resources Bulletin, Vol. 17, No. 2, pp. 197-202.
- Akaike, H. (1974): A New Look at the Statistical Model Identification, IEEE Trans. on Autom. Contr., AC-19, pp. 716-723.
- Cunnane, C. (1978): Unbiased Plotting Positions—A Review, Journal of Hydrology, Vol. 37, pp. 205-222.
- 土木学会, 編 (1985): 水理公式集, 昭和 60 年版, pp. 131-134.
- 合田良実 (1988a): 極値統計におけるプロット公式ならびに推定値の信頼区間に関する数値的検討, 運輸省港湾技術研究所報告, 第 27 巻, 1 号, pp. 31-92.
- 合田良実 (1988b): 波浪の極値統計解析, 1988 年度 (第 24 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, B-6, 土木学会水理委員会, 18pp.
- Gumbel, E.J. (1958): Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press, 1958, 375pp. (河田竜夫・岩井重久・加瀬滋男 (監訳): 極値統計学 — 極値の理論とその工学的応用 —, 生産技術センター新社, 404pp.)
- Hazen, A. (1914): Storage to Be Provided in Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply, Trans. ASCE, Vol. 77, pp. 1539-1669.
- 石原安雄 (1987): 年最大水文量の生起確率評価について, 水利科学, No. 178, pp. 1-18.
- 河田恵昭 (1987): 高潮の極値統計, 1987 年度 (第 23 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, B-7, 土木学会水理委員会, 22pp.
- 菊地原英和 (1971): 風速の再現期間計算法の比較考察 — 二重指数分布の当てはめにおける問題点 —, 天気, Vol. 18, No. 1, pp. 21-34.
- 岸原信義・武蔵哲夫 (1981): 異常豪雨は予測できるか (I)— 確率雨量に関する諸問題について, 水利科学, No. 141, pp. 1-17.
- Kullback, S. (1959): Information Theory and Statistics, Wiley & Sons, New York, 395pp.

坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎 (1983): 情報量統計学, 共立出版, pp. 27-64.

Singh, V.P., ed. (1987): Regional Flood Frequency Analysis, Proc. of the International Symposium on Flood Frequency and Risk Analyses, 14-17 May 1986, Louisiana State University, Baton Rouge, U.S.A., D. REIDEL Pub. Co., 400pp.

高棹琢馬 (1983): 気象災害に関する極値・集中豪雨, 土木学会誌, 第 68 巻, 第 10 号 (9 月号), pp.7-11.

高棹琢馬・宝 馨・清水 章 (1986): 琵琶湖流域水文データの基礎的分析, 京都大学防災研究所年報, 第 29 号 B-2, pp. 157-171.

第 2 章

水文頻度解析モデルの母数推定法の評価

対象とする水文量の発生過程の解析により、その水文量に対して適切と考えられる分布が存在するとする。所与の一群のデータに対して、その分布の母数推定を行おうとするとき、種々提案されている母数推定法のうちどれを用いればよいのかが問題となる。本章では、3 母数対数正規分布、Gumbel 分布、一般化極値分布についてそれらに対してよく用いられる母数推定法を Monte Carlo シミュレーションにより比較評価する。

2.1 Monte Carlo シミュレーションによる母数推定法の評価

以下の手順により母数推定法の優劣を評価する。

Step 1) 母集団を想定する。すなわち、母集団の確率分布と母数を仮定する。

Step 2) 母集団から大きさ N の標本を抽出する。すなわち、仮定した分布に従う乱数を N 個発生させる。

Step 3) 発生させた標本に対して、各々の推定法により母数を推定し、確率水文量を推定する。

Step 4) Step 2 と Step 3 を M 回繰り返し、各々の推定法による母数と確率水文量の推定値の平均値と標準偏差 (推定誤差) および平均平方誤差 (MSE, mean square error) を算定する。

Step 5) MSE の値が小さい (すなわち、真値からの偏りが小さく、かつ、推定誤差が小さい) 推定値を与える母数推定法が良いと判定する。

ここで平均平方誤差 (MSE, mean square error) について説明を加えておく。MSE は推定量の偏倚と推定誤差を併せて評価できる指標である。ある統計量 θ の推定量 $\hat{\theta}$ に関する MSE は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\text{MSE} &= E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \\ &= E[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}])^2] + (E[\hat{\theta}] - \theta)^2 \\ &= \text{Var}[\hat{\theta}] + \{\text{Bias}[\hat{\theta}]\}^2\end{aligned}\quad (2.1)$$

ここに、 $E[\cdot]$ は期待値操作を、 $\text{Var}[\cdot]$, $\text{Bias}[\cdot]$ は、それぞれ分散、偏りを表す。すなわち、MSE は、推定量 $\hat{\theta}$ のばらつき具合 Var と偏りの大きさ Bias の二乗の和で表されるものであり、この値が小さいほど良い推定であると言える。確率水文量の推定値、推定誤差と MSE の関係を図示したのが図 2.1 である。図中、 S_d は分散 Var の平方根を示す ($\text{Var} = S_d^2$)。MSE の平方根をとったものは平方根平均平方誤差 (root mean square error, RMSE) と呼ばれる。以下では、MSE の代わりに RMSE を用いて母数推定法の比較を行うこととする。

上の作業により、想定した分布の種々の母数推定法の中でどれが良いのかが明らかになる。また、標本の大きさ N を変化させて Step 1 から Step 5 の手順を行うことにより、 N の大きさによって最適な母数推定法が異なるのか、 N の増加にともなって母数と確率水文量の推定精度がどのように推移するのかが明らかになる。ここでは標本の大きさ $N = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 500, 1000$ とした。また、繰り返し回数として、 $M = 100, 1000, 3000, 5000$ を試みたが、100 回の場合には、1000 回以上の場合とかなり異なる結果を得た。後述の検討結果は、すべて $M = 5000$ 回の場合を示す。

次の 3 つの節で、対数正規分布、Gumbel 分布、一般化極値分布についてこの手順を適用し、母数推定法の良否を判定する。想定する母分布には、大阪の年最大日雨量の 92 年間 (1889–1980 年) のデータ (神田・藤田 (1982)) および St. Marys 川の年最大日流量の 59 年間 (1916–1974 年) のデータ (Kite (1977)) に、上の三つの分布を最尤法であてはめたときの母数推定値に近いものを母数として採用した (詳しくはそれぞれの結果と考察の項で述べる)。

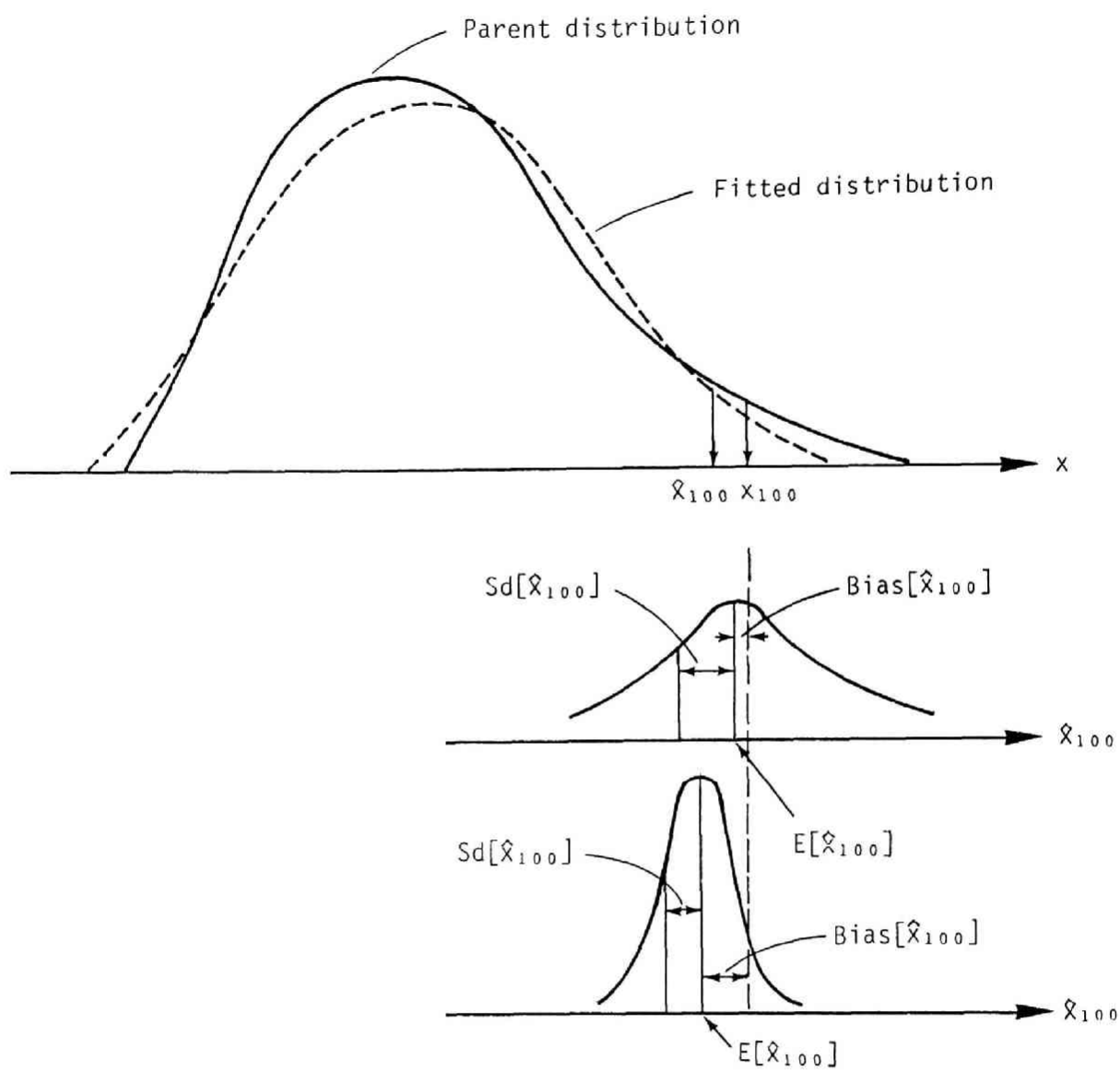


図 2.1: 確率水文量 x_{100} の推定値 \hat{x}_{100} , 推定誤差 Sd と $Bias$
 [MSE = $Sd^2 + Bias^2$ であり, 中段の図は $Bias$ は小さいが Sd が大きい場合, 下段の図は Sd は小さいが $Bias$ が大きい場合を示している。]

2.2 3 母数対数正規分布への適用

対数正規分布は、1875年 Gulton によって最初に用いられたと言われる (たとえば, Chow(1954))。河川流量の値を対数変換したものが正規分布に良く適合することは, Hazen (1914) によって指摘されており, この頃から, 対数確率紙による確率洪水流量の推定が行われ始めていた¹。1930年には, 洪水流量の解析法が取りまとめられている (Hazen(1930)) が, 母数推定よりも確率流量の推定に力点がおかれている。

1930年頃, ドイツの Grassberger は河川の毎日流量および毎年最大値に, フランスの Gibrat は毎日流量に, それぞれ独立に対数正規分布の適用を検討している。その直後に, Slade (1934) が提案した上下限をもつ非対称分布は3母数対数正規分布であり, 岩井 (1947, 1949) がわが国に紹介するとともに, その解法を詳細に検討した。その当時までの対数正規分布に関する多数の研究が Chow (1954) によってレビューされている。その後, Sangal and Biswas (1970), Burges et al. (1975), Stedinger (1980) などが, 3母数対数正規分布の特性, 母数推定法について数値実験による検討を行っている。

わが国では, 岩井の後, 石原・高瀬 (1957), 高瀬 (1957), 角屋 (1962) らの研究により3母数対数正規分布の水文統計への適用法が一応確立された。これらの成果は, 角屋 (1964) によって取りまとめられている。これらは, 手法的には一応確立され, 実務で多用されているのであるが, 母数推定法が異なると得られる答え (母数や確率水文量の推定値) が異なるため, いくつかの方法を試みて適当と思われる値を採用するといった極めて曖昧な取り扱いがなされている。

Hoshi et al.(1984) は, それまでの対数正規分布に関する多数の文献を参照したのち, 母歪係数が 0.766, 1.625, 4.00 の3通りの母集団を想定して, 標本の大きさ $N = 20, 40, 80$ の場合について, 積率法, 岩井法などの6方法と最尤法との比較を行っている。

2.2.1 3 母数対数正規分布

3母数対数正規分布は, (1.16) 式の2母数対数正規分布に, さらに母数 a を加えたもので, $Y = \log(X - a)$ なる変換を用いる。以後の議論の便宜上, 対数 \log を自然対数 \ln でおいたものを形式 (I) と呼ぶことにし, (1.16) 式の母数 ζ, λ に対応する母数を, それぞれ μ_y, σ_y と書くことにすると, その確率密度関数は次式で与えられる。

形式 (I)

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\ln(x-a) - \mu_y}{\sigma_y} \right\}^2 \right] \quad (2.2)$$

ここに, 標準変量, 変換変量はそれぞれ

$$S = \frac{\ln(X-a) - \mu_y}{\sigma_y}, \quad Y = \ln(X-a) \quad (2.3)$$

である。

形式 (II)

標準変量を, いわゆる Slade 形の変換を用いて,

$$S = k \ln \frac{X+b}{x_0+b} \quad (2.4)$$

と表すと, 確率密度関数は,

$$f(x) = \frac{k}{(x+b)\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(k \ln \frac{x+b}{x_0+b} \right)^2 \right] \quad (2.5)$$

母数は, 形式 (I) では μ_y, σ_y, a , 形式 (II) では k, b, x_0 であり, 次のような関係がある。

$$\mu_y = \ln(x_0+b) \quad (2.6)$$

$$\sigma_y = 1/k \quad (2.7)$$

$$a = -b \quad (2.8)$$

¹もちろん, プロットイング・ポジション公式は専ら Hazen 公式が用いられていたわけである。

形式 (I) を用いると、変数 X の平均 μ_x , 分散 σ_x^2 , 歪係数 β_x は次のようになる。

$$\mu_x = a + \exp(\mu_y + \sigma_y^2/2) \quad (2.9)$$

$$\sigma_x = \exp(2\mu_y + \sigma_y^2) \cdot \{\exp(\sigma_y^2) - 1\} \quad (2.10)$$

$$\beta_x = \frac{\exp(3\sigma_y^2) - 3\exp(\sigma_y^2) + 2}{\{\exp(\sigma_y^2) - 1\}^{3/2}} \quad (2.11)$$

形式 (III)

対数変換に常用対数 \log を用いて標準変量, 変換変量をそれぞれ

$$S = \frac{\log(X - a') - \mu_z}{\sigma_z}, \quad Z = \log(X - a') \quad (2.12)$$

とすれば, 確率密度関数は,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z(x - a') \ln 10} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\log(x - a') - \mu_z}{\sigma_z} \right\}^2 \right] \quad (2.13)$$

となる。自然対数を用いた形式 (I) と常用対数を用いた形式 (III) の母数には, 次のような関係がある。

$$\mu_z = \mu_y / \ln 10 \quad (2.14)$$

$$\sigma_z = \sigma_y / \ln 10 \quad (2.15)$$

$$a' = a \quad (2.16)$$

3 母数対数正規分布の母数推定法は以上の 3 形式のどれかを用いる。ここでは, 各々の推定法により与えられる母数を, (2.6)~(2.8) 式 または (2.14)~(2.16) 式により形式 (III) の母数 $\mu_z, \sigma_z, a' (= a)$ に変換して検討する。

2.2.2 3 母数対数正規分布の母数推定法

この項では, 3 母数対数正規分布において, 特にわが国でよく用いられる, あるいは, 最近提案され十分検証の済んでいない, 以下の母数推定法を比較評価する。

- 最尤法
- 最小二乗法
- 積率法
- 石原・高瀬の方法
- 岩井改良法
- Sextile 法
- PWM 法

これらの方法について以下に説明を加える。

a) 最尤法

N 個の資料 x_1, x_2, \dots, x_N が与えられたとき, 尤度関数 $L(\theta)$ は次式で定義される。

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i; \theta) \quad (2.17)$$

ここに, $f(x; \theta)$ は確率密度関数であり, θ は母数のベクトルである。一般に, 尤度関数はその対数である対数尤度 (log-likelihood)

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^N \ln f(x_i; \theta) \quad (2.18)$$

の形式で用いられる。最尤法は $L(\hat{\theta}) > L(\theta)$ なる $\hat{\theta}$ を母数推定値とする方法である。すなわち、対数尤度を θ で偏微分して 0 と置いた連立方程式

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta) = 0 \quad (2.19)$$

を解けばよい。端野 (1976) は、形式 (II) に対する最尤法の実用的解法を提示し、時間雨量系列への適用例を示した。

形式 (III) に対する対数尤度関数は、

$$\begin{aligned} \ln L(\mu_z, \sigma_z, a') &= \sum_{i=1}^N \ln f(x_i; \mu_z, \sigma_z, a') \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{s_i^2}{2} - \ln \sigma_z - \ln(x_i - a') - \ln(\sqrt{2\pi}) - \ln(\ln 10) \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

ここに、 $s_i = \{\log(x_i - a') - \mu_z\} / \sigma_z$ である。

ここでは、母数の最尤推定値を求めるのに、FACOM FORTRAN SSLII の最適化プログラム (改訂準ニュートン法による多変数関数の極小化プログラム DMINF1, 富士通 (1980)) を用いて数値的に解く (すなわち、(2.20) 式を最大化するような母数の組合せを探索する) ことにする。

b) 最小二乗法

N 個の資料が与えられたときその値の小さい順に並べ替えた順序統計量を x_1, x_2, \dots, x_N とする。いま、 i 番目の順序統計量 x_i に対応する非超過確率 p_i を何らかのプロットイング・ポジション公式で与えることにして、標準変量に関して最小二乗法を適用することにする。基本的には、1.5.2 で述べた方法と同じである。この p_i に対応する標準変量 s_i^* は次のようになる。

$$s_i^* = g(F^{-1}(p_i)) \quad (2.21)$$

ここに、 g は、もとの変量 X の変換変量 Y を規準化する関数 (1.5.2 の (1.4), (1.5) 式を見よ)、 F は変量 Y の累積分布関数である。一方、順序統計量 $y_i = h(x_i)$ の標準変量を $s_i = g(y_i)$ とすると、 s_i と s_i^* の差の二乗和 SSE は次のようになり、母数 θ のみの関数となる。

$$\text{SSE}(\theta) = \sum_{i=1}^N (s_i - s_i^*)^2 \quad (2.22)$$

最小二乗法は $\text{SSE}(\hat{\theta}) < \text{SSE}(\theta)$ なる $\hat{\theta}$ を母数推定値とする方法である。すなわち、この SSE を θ で偏微分して 0 と置いた連立方程式

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \text{SSE}(\theta) = 0 \quad (2.23)$$

を解けばよい。ここでは、最尤法の場合と同様、DMINF1 により数値的に解く (すなわち、SSE を最小にするような母数の組合せを探索する)。また、用いるプロットイング・ポジション公式として Weibull 公式と Hazen 公式を比較する。

c) 積率法

この方法は、標本積率 (あるいはそれを補正したもの) を理論積率と等しく置いて母数を推定する方法である。いま、 N 個の資料 x_1, x_2, \dots, x_N が与えられたとき、標本平均 \bar{x} と標本平均 \bar{x} まわりの r 次の標本積率 m_r は次のようになる。

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.24)$$

$$m_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^r \quad (2.25)$$

このとき、標本分散 \hat{s}^2 と標本歪係数 C_s は

$$\hat{s}^2 = m_2 \quad (2.26)$$

$$C_s = \frac{m_3}{\hat{s}^3} = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \quad (2.27)$$

となる。この標本積率 \bar{x}, \hat{s}^2, C_s を確率分布モデルの理論積率 $\mu_x, \sigma_x^2, \beta_x$ と等しく置いて得られる方程式を解けばよいが、一般に標本積率は偏倚を有するので、次のようにいくつかの補正法が考えられている。

[平均] 一般に標本平均 \bar{x} がよく用いられるが、標本数が小さいとき、メジアン (中央値)、モード (最頻値) などが有効である。本論文では標本平均を用いた。

[分散] 一般に標本分散 \hat{s}^2 の偏倚を補正した不偏分散 \hat{s}'^2 がよく用いられる。すなわち、

$$\begin{aligned}\hat{s}'^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{N}{N-1} \hat{s}^2\end{aligned}\quad (2.28)$$

本論文では不偏分散を用いた。

[歪係数] 一般に標本歪係数 C_s の偏倚を補正した不偏歪係数 C'_s がよく用いられる。すなわち、

$$C'_s = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2} C_s \quad (2.29)$$

また、Bobée and Robitaille (1975) は、Wallis ら (1974) の研究に基づいて、次のような 3 母数対数正規分布の標本歪係数の偏倚を補正する実験式を提案している。

$$\hat{\beta}_x = \left\{ \left(1.01 + \frac{7.01}{N} + \frac{14.66}{N^2} \right) + \left(\frac{1.69}{N} + \frac{74.66}{N^2} \right) C_s^3 \right\} C_s \quad (2.30)$$

この式は標本の大きさ N が $20 \leq N \leq 90$ 、母歪係数 β_x が $0.25 \leq \beta_x \leq 5.0$ の範囲で適切であるとされているが、ここでは、 $N = 10$ または $N > 100$ のときにも適用する。

d) 石原・高瀬の方法

石原・高瀬 (1957) は、標本歪係数の偏倚を補正する図表 (図 2.2) を提示している。石原・高瀬法とは、この図表を用いて標本歪係数の偏りを補正して母数を推定するもので一種の積率法である。この方法は、次に述べる岩井改良法とともに、わが国で広く慣用されている。

形式 (II) の標準変量より、

$$X + b = (x_0 + b) \exp\left(\frac{S}{k}\right) \quad (2.31)$$

$x = -b$ のまわりの i 次の母集団積率 m_i は、

$$\begin{aligned}m_i &= \int_0^1 (x+b)^i dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{(x_0+b) \exp(\frac{s}{k})\}^i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{s^2}{2}) ds \\ &= (x_0+b)^i \exp(\frac{i^2}{2k^2}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{(s-i/k)^2}{2}\} ds \\ &= (x_0+b)^i \exp(\frac{i^2}{2k^2})\end{aligned}$$

となる。この m_i によれば、 x の平均 μ_x 、分散 σ_x^2 、歪係数 β_x は次のようになる。

$$\begin{aligned}\mu_x &= m_1 - b \\ &= (x_0 + b) \exp(\frac{1}{2k^2}) - b\end{aligned}\quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= m_2 - m_1^2 \\ &= (x_0 + b)^2 \left\{ \exp(\frac{2}{k^2}) - \exp(\frac{1}{k^2}) \right\}\end{aligned}\quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}\beta_x &= (m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3)/(m_2 - m_1^2)^{3/2} \\ &= \{\exp(9/2k^2) - 3\exp(5/2k^2) + 2\exp(3/2k^2)\} / \{\exp(2/k^2) - \exp(1/k^2)\}^{3/2}\end{aligned}\quad (2.34)$$

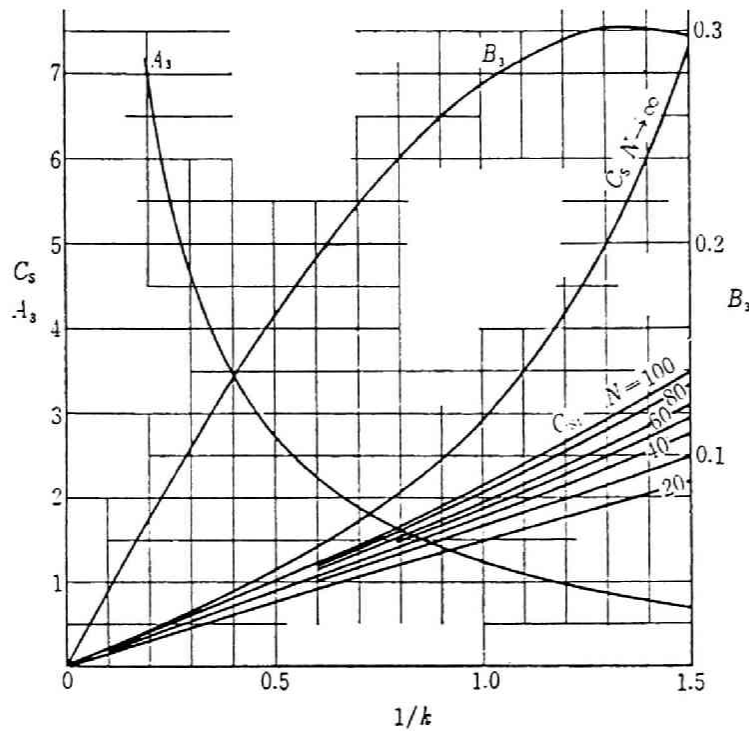


図 2.2: 石原・高瀬の図表

一方, データ数 N を与えると, プロットイング・ポジション公式と累積分布関数の逆関数から, i 番目の資料 x_i に対する標準変量 s_i が求められる。(2.31) 式によれば, x の平均 \bar{x} , 2 乗平均 \bar{x}^2 , 3 乗平均 \bar{x}^3 は次のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{x} &= B M_1 - b \\ \bar{x}^2 &= B^2 M_2 - 2b \cdot B \cdot M_1 + b^2 \\ \bar{x}^3 &= B^3 M_3 - 3b \cdot B^2 \cdot M_2 + 3b^2 \cdot B \cdot M_1 - b^3\end{aligned}$$

ここに, $B = x_0 + b$, $M_m = (1/N) \sum_{i=1}^N \exp(m \cdot s_i/k)$, $m = 1, 2, 3$ である。以上のことから, 標本歪係数 C'_s は次のようになる。

$$C'_s = (M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3)/(M_2 - M_1^2)^{3/2} \quad (2.35)$$

すなわち, C'_s は k, N, s_i の関数であることがわかる。石原・高瀬は, Hazen 公式を用いて β_x に対する C'_s の修正係数 $F_s (= \beta_x/C'_s - 1)$ を N と C'_s の関数として図示した(図 2.2)。

これが石原・高瀬の図表(土木学会(編) 水理公式集昭和 46 年改訂版, p.145)と呼ばれるものである。実際には, 与えられた資料(1 組のデータ)から歪係数 C_{s1} を

$$C_{s1} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3 / \{(N-1) \cdot (\hat{\sigma}_x^2)^{3/2}\} \quad (2.36)$$

より算出する。ここに, $\hat{\sigma}_x^2$ は不偏分散である。この C_{s1} とデータ数 N から, 石原・高瀬の図表を用いて $\hat{\beta}_x$ を求める。この $\hat{\beta}_x$ を (2.34) 式に代入して母数 k を推定する。母数 b, x_0 は, 標本平均 \bar{x} と不偏分散 $\hat{\sigma}_x^2$ を (2.32), (2.33) 式に代入して推定する。ここでは, 以上の手順をプログラム化し, 図解法でなく, 数値的に解いた。

e) 岩井改良法

この方法は岩井(1949)の提案を角屋(1962)が改良したものである。順序統計学の理論を用いて母数 a を推定したのち, 積率法を用いて母数 μ_y, σ_y を推定する方法である。

N 個の資料 x_1, x_2, \dots, x_N が与えられたとき, 幾何平均 x_g を x_0 の第 1 次近似とする。

$$x_g = (x_1 x_2 \cdots x_N)^{1/N} \quad (2.37)$$

$$\log x_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log x_i \quad (2.38)$$

順序統計量を x_1, x_2, \dots, x_N とすると, i 番目, $N-i+1$ 番目の統計量 x_i, x_{N-i+1} に対応する標準変量 s_i, s_{N-i+1} は形式 (II) によれば次のようになる。

$$s_i = k \ln \frac{x_i + b}{x_g + b}, \quad s_{N-i+1} = k \ln \frac{x_{N-i+1} + b}{x_g + b} \quad (2.39)$$

標準変量 s_i, s_{N-i+1} に対応する非超過確率 p_i, p_{N-i+1} は, プロットイング・ポジション公式から次のようになる。

$$p_i = \frac{i - \omega}{N + 1 - 2\omega}, \quad p_{N-i+1} = \frac{N - i + 1 - \omega}{N + 1 - 2\omega} \quad (2.40)$$

このとき, $p_i + p_{N-i+1} = 1$ となり, 標準変量は $s_i + s_{N-i+1} = 0$ となる。(2.39) 式を代入して

$$k \ln \frac{x_i + b}{x_g + b} + k \ln \frac{x_{N-i+1} + b}{x_g + b} = 0 \quad (2.41)$$

すなわち, b に関する方程式が得られる。この解 b_i は,

$$b_i = \frac{x_i x_{N-i+1} - x_g^2}{2x_g - (x_i + x_{N-i+1})} \quad (2.42)$$

となる。実際は $i = 1, 2, \dots, r (\approx N/10)$ なる r 個の b_i の平均で b を推定する。すなわち,

$$\hat{b} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r b_i \quad (2.43)$$

母数 x_0, k は次式で推定する。

$$\ln(\hat{x}_0 + \hat{b}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(x_i + \hat{b}) \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{\hat{k}^2} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{x_i + \hat{b}}{\hat{x}_0 + \hat{b}} \right)^2 \quad (2.45)$$

f) Sextile 法

Sextile 法は, Jenkinson (1969) によって, 一般化極値分布の 3 母数推定法として提案されたもので, 積率法においてしばしば問題となる高次の積率におけるサンプリングエラーをおさえることができ, したがって, 異常値の母数推定に及ぼす影響を除去できる点に特徴があるとされている (星 (1986))。Hoshi and Leeyavanija (1986) は, この方法を PearsonIII 型分布, 対数 PearsonIII 型分布に適用した。3 母数対数正規分布への適用は, 竹内ら (1987) が試みている。

Sextile 法では, まず, 確率密度関数の分割面積がそれぞれ 6 分の 1 ずつとなるような 7 個の区間境界値 x_i から, 6 個の sextile mean, ν_i を算出する。すなわち,

$$x_0 = -\infty (3 \text{ 母数対数正規分布では分布の下限値 } a), \quad x_6 = +\infty, \quad (2.46)$$

$$x_j = F^{-1}(j/6), \quad j = 1, 2, \dots, 5 \quad (2.47)$$

$$\nu_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} 6x f(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.48)$$

ここに, F と f はそれぞれ累積分布関数と確率密度関数である。この ν_i の平均 μ_ν , 標準偏差 σ_ν , 差の比 ℓ_ν は次のようになる。

$$\mu_\nu = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \nu_j \quad (2.49)$$

$$\sigma_\nu^2 = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 (\nu_j - \mu_\nu)^2 \quad (2.50)$$

$$\ell_\nu = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_6 - \nu_5} \quad (2.51)$$

次に、与えられた資料を小さい順に並べ替えてデータ数の等しい六つの群に分割する。標本の大きさが6の倍数でないときは、標本誤差を小さくするために、その値の大きな群の標本数を増すように配分する。こうして、各群から標本 sextile means ν_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) を算出し、(2.49) ~ (2.51) 式と同様の定義に基づいた統計量 $\hat{\mu}_\nu, \hat{\sigma}_\nu, \hat{\ell}_\nu$ を求める。理論値と標本から算出したこれらの統計量がそれぞれ等しいと置いて三つの連立方程式を立て、その解を母数推定値 $\hat{\mu}_y, \hat{\sigma}_y, \hat{a}$ とする。

形式 (I) の 3 母数対数正規分布の場合の sextile mean ν_i の理論値は

$$\nu_i = 6 \exp \left(\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2} \right) \{ \Phi(t_i - \sigma_y) - \Phi(t_{i-1} - \sigma_y) \} + a \quad (2.52)$$

ここに、 t_i は $\Phi(t_i) = i/6$, $i = 1, 2, \dots, 6$ なる定数で、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数である。この ν_i の平均 μ_ν , 標準偏差 σ_ν , 差の比 ℓ_ν は

$$\mu_\nu = \exp \left(\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2} \right) + a \quad (2.53)$$

$$\sigma_\nu = \exp \left(\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2} \right) \sqrt{6 \sum_{i=1}^6 (\Phi(t_i - \sigma_y) - \Phi(t_{i-1} - \sigma_y))^2 - 1} \quad (2.54)$$

$$\ell_\nu = \frac{\Phi(t_2 - \sigma_y) - 2\Phi(t_1 - \sigma_y)}{1 - 2\Phi(t_5 - \sigma_y) + \Phi(t_6 - \sigma_y)} \quad (2.55)$$

となる。竹内らは、(2.55) 式について、 ℓ_ν と σ_y の近似多項式を予め作成しておき、それを用いて $\hat{\ell}_\nu$ に対する $\hat{\sigma}_y$ を求めた(竹内・土屋 (1988b))。ここでは、Newton 法により、(2.55) 式を数値的に解いた。

g) PWM 法

PWM 法は、Greenwood ら (1979) により提案されたもので、積率法的一种と考えてよい。通常の積率は、変量 X を原点まわり (あるいは平均値まわり) に累乗するが、PWM (probability weighted moments, 確率加重積率) は累積分布関数 $F(x)$ の累乗で加重した積率であり、次式で定義される。

$$M_{\ell,j,k} = E[X^\ell F^j (1 - F)^k] \quad (2.56)$$

いま、累積分布関数 $F = F(x)$ の逆関数 (inverse form) が陽形式 $x = x(F)$ で表記可能のとき、 $M_{\ell,j,k}$ は

$$M_{\ell,j,k} = \int_0^1 \{x(F)\}^\ell F^j (1 - F)^k dF \quad (2.57)$$

となる。ここに ℓ, j, k は実数である。 $j = k = 0$ で ℓ が非負の整数であるとき、 $M_{\ell,0,0}$ は原点まわりの ℓ 次積率となる。すなわち、

$$M_{\ell,0,0} = \int_0^1 \{x(F)\}^\ell dF \quad (2.58)$$

j, k が非負の整数であるとき、 $M_{\ell,j,0}$ と $M_{\ell,0,k}$ は次に示す関係がある。

$$M_{\ell,j,0} = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^k M_{\ell,0,k} \quad (2.59)$$

$$M_{\ell,0,k} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j M_{\ell,j,0} \quad (2.60)$$

通常、変量 X の次数 $\ell = 1$ として、(2.59) 式、(2.60) 式のどちらかを用いる。ここでは、 $k = 0$ すなわち $M_{1,j,0}$ を用いて

$$M_j = M_{1,j,0} \quad (2.61)$$

と表記する。

次に、与えられた資料から標本 PWM を推定する方法を示す。もし j, k が非負の実数であるとき、ある母集団から抽出した $k+j+1$ 個の資料の第 $j+1$ 位順序統計量の ℓ 次積率の期待値 $E[X_{j+1, k+j+1}^\ell]$ は $M_{\ell, j, k}$ に比例する。すなわち、

$$E[X_{j+1, k+j+1}^\ell] = \frac{M_{\ell, j, k}}{B(j+1, k+1)} \quad (2.62)$$

ここに、 $B(\cdot, \cdot)$ はベータ関数である。いま、 $\ell = 1, k = 0$ のとき

$$M_{1, j, 0} = B(j+1, 1)E[X_{j+1, j+1}] \quad (2.63)$$

となる。 N 個の資料から $j+1$ 個 ($N > j+1$) の資料を抽出するとき、その最大値が x_i となる確率は $\binom{i-1}{j} / \binom{N}{j+1}$ であるので、 $N = \infty$ のある母集団から抽出した $j+1$ 個の資料の最大値の期待値 $E[X_{j+1, j+1}]$ は

$$E[X_{j+1, j+1}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i x_i \frac{\binom{i-1}{j}}{\binom{N}{j+1}} \quad (2.64)$$

となり、標本 PWM \hat{M}_j は

$$\hat{M}_j = \frac{1}{N} \sum_i x_i \frac{(i-1)(i-2) \cdots (i-j)}{(N-1)(N-2) \cdots (N-j)} \quad (2.65)$$

となる。PWM 法は、この \hat{M}_j を分布モデルの PWM と等しく置いて母数を推定する方法である。

従来、PWM 法は累積分布関数 $F = F(x)$ の逆関数が陽形式 $x = x(F)$ で表記可能のときにのみ有効であるとされていたが、竹内・土屋 (1988a) は、 F の逆関数が陽形式で表記できない正規分布、対数正規分布、PearsonIII 型分布の母数の PWM 解を解析的に導出した。竹内・土屋によれば、この 3 母数対数正規分布の PWM 解は次のようになる。

$$\frac{\Psi(\sigma_y/\sqrt{2}) - 1/3}{\Phi(\sigma_y/\sqrt{2}) - 1/2} = \frac{M_2 - M_0/3}{M_1 - M_0/2} \quad (2.66)$$

$$a = M_0 \frac{\Phi(\sigma_y/\sqrt{2}) - M_1/M_0}{\Phi(\sigma_y/\sqrt{2}) - 1/2} \quad (2.67)$$

$$\mu_y = \ln(M_0 - a) - \frac{\sigma_y^2}{2} \quad (2.68)$$

ここに、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数であり、 $\Psi(\cdot)$ は

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^x 2\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) d\Phi(t) \quad (2.69)$$

である。また、竹内・土屋は、実用化のために、(2.66) 式の近似多項式を作成している。

$$\frac{M_2 - M_0/3}{M_1 - M_0/2} = D \quad (2.70)$$

のとき

$$\sigma_y = \sqrt{2}\Phi^{-1}(p), \quad p = 0.5 + \sum_{i=0}^2 C_i(D-1)^{2i-1} \quad (2.71)$$

ここに、 $C_1 = 1.7319517, C_2 = -1.7876909, C_3 = -1.9755174$ である。この多項式は、 D が $1.00 < D < 1.248$ で適切である。竹内・土屋 (1988b) は、PWM 法の性能を正規分布、対数正規分布について、いくつかの母数推定法と比較検討している。

2.2.3 結果と考察

想定した母数 μ_z, σ_z, a の値を、参考とした最尤推定値とともに表 2.1 に示す。

以下では、簡単のため、大阪の年最大日雨量を想定した場合を“極値降水量の場合”、St. Marys 川の年最大日流量を想定した場合を“極値流量の場合”と呼ぶことにする。また、偏倚、平均二乗誤差の平方根をそれぞれ Bias, RMSE と記す。

表 2.1: 各分布の母数の最尤推定値とシミュレーションに採用した値

確率分布 モデル	母数	最尤推定値		シミュレーション	
		大阪	St. Marys	大阪	St. Marys
3 母数 対数正規分布 (LN3)	μ_z	1.72	4.04	2.00	4.00
	σ_z	0.22	1.80×10^{-1}	0.20	2.00×10^{-1}
	a	30.4	2.54×10^3	30.0	2.50×10^3
Gumbel 分布	α	4.44×10^{-2}	2.50×10^{-4}	4.00×10^{-2}	2.50×10^{-4}
	u	76.9	1.21×10^4	77.0	1.20×10^4
一般化極値 (GEV) 分布	x_0	75.4	1.21×10^4	75.0	1.20×10^4
	α	21.3	3.77×10^3	20.0	3.70×10^3
	k	-1.22×10^{-1}	-5.17×10^{-2}	-1.00×10^{-1}	-5.00×10^{-2}

表 2.2: 棄却された標本の数 [極値降水量, $M = 1000$ の場合]

母数推定法	$N=20$	40	60	80	100	200	500
最尤法	88	46	17	7	6	0	0
積率法 (標本歪)	325	189	130	70	37	5	0
積率法 (不偏歪)	287	170	117	63	34	5	0
積率法 (B-R 歪)	177	123	82	45	23	3	0
石原・高瀬法	188	122	80	42	20	1	0
最小二乗法 (Weibull)	107	65	28	11	6	0	0
最小二乗法 (Hazen)	95	60	29	10	6	0	0
PWM 法	139	93	46	22	13	0	0
岩井改良法	117	70	24	12	8	0	0
Sextile 法	71	41	39	13	8	0	0

なお, Monte Carlo シミュレーションを実行するとき, 解析対象とするにふさわしくない標本が発生することがある。たとえば, 母分布が正の歪をもつ (右に歪んでいる) にもかかわらず, 発生させられた標本が負の歪をもつことも有り得る。こうした標本に対しては, どのような推定法を用いても, 母数の真値に近い値を見いだすことは難しいと言える。このような標本は, 標本の大きさ (データ数) が小さいときに多く発生するのであり, ここでは, 次の条件を満たすとき棄却することにした。

$$|\hat{a} - a| \geq \mu_z \quad (2.72)$$

ここに, μ_z は (2.9) 式から求めた X の平均である。この条件は, 推定した \hat{a} の絶対値が異常に大きくならないように配慮したものである。3 母数対数正規分布のような変数の下限値 a をもつ分布の場合, この下限値を求めるのが難しいことは, よく知られているところであるが, \hat{a} が真値 a からかけ離れた値となるということは, 逆に言うとその場合の標本が母数推定がうまくいかないようなものであると解釈できる。

また, PWM 法では,

$$D = \frac{\hat{M}_2 - \hat{M}_0/3}{\hat{M}_1 - \hat{M}_0/2} \leq 1.00, \quad D \geq 1.248 \quad (2.73)$$

このとき, 近似多項式 (2.71) の誤差が大きくなる。岩井改良法では,

$$x_{i+b} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.74)$$

このとき, (2.39) 式の実数が負になる。

表 2.2 に, $M = 1000$ のうちいくつかの標本が棄却されたかを, 各母数推定法ごと, N ごとに示した。 $M = 5000$ の場合はこの表の数の約 5 倍となる。棄却された標本の数が多いということは, 母数推定がうまくいかないことが多いと言える。ただし, 棄却された標本の数が少なくても, (2.72)~(2.74) 式の条件に引っかかることが少なかった

表 2.3: 100 年確率降水量の期待値, Bias, Sd, RMSE [対数正規分布; 真値 321.92]

	R.P. = 100(YR), QUANTILE = 321.92												
SIZE	N= 10	N= 20	N= 30	N= 40	N= 50	N= 60	N= 70	N= 80	N= 90	N= 100	N= 200	N= 500	N=1000
C.S.													
MEAN	8.6025	8.0002	1.0202	1.1176	1.1895	1.2330	1.2641	1.2865	1.3224	1.3400	1.4488	1.5145	
S.D.	0.4547	0.5511	0.5747	0.5987	0.5761	0.5697	0.5577	0.5682	0.5568	0.5463	0.4778	0.3646	
MLE	164007.40	368.20	339.44	332.72	338.52	328.37	327.06	326.42	325.61	325.20	323.56	322.88	
	163775.57	38.36	17.52	18.88	8.50	6.45	5.13	4.58	3.68	3.27	1.63	0.87	
*****	138.83	73.87	58.15	50.88	45.16	42.27	38.53	36.38	34.33	34.33	23.54	14.57	
*****	143.26	75.14	51.68	45.61	42.58	38.70	36.56	34.48	32.50	31.68	23.50	14.68	
MOM													
(CS0)	389.83	315.63	316.32	315.70	315.82	315.68	315.73	315.89	315.98	316.02	317.69	319.93	
	-12.89	-5.38	-5.68	-6.14	-6.18	-6.32	-6.19	-6.83	-5.05	-5.08	-4.25	-1.90	
	85.00	65.88	55.31	40.11	44.75	41.47	39.73	38.22	36.35	35.02	26.40	18.82	
	86.83	66.00	55.50	45.17	41.95	41.05	40.21	38.70	36.83	35.52	26.83	18.13	
MOM													
(CS1)	314.71	318.81	317.82	316.20	316.30	315.98	316.18	316.20	316.42	316.40	317.04	320.85	
	-7.21	-3.02	-4.91	-5.64	-5.53	-5.05	-5.74	-5.63	-5.58	-5.43	-3.09	-1.88	
	86.83	66.82	55.44	40.30	45.00	41.69	39.86	38.34	36.46	35.18	26.53	18.82	
	87.13	66.14	55.66	40.71	45.33	42.11	40.28	38.75	36.87	35.52	26.83	18.12	
MOM													
(B-R)	331.87	328.70	325.72	324.25	323.36	322.14	321.63	321.36	321.13	320.94	320.68	321.39	
	0.04	6.87	3.89	2.33	1.44	0.22	-8.20	-8.56	-8.70	-1.08	-1.33	-8.53	
	80.14	69.19	59.81	52.87	48.43	44.88	42.86	40.89	38.86	37.23	27.64	18.42	
	89.78	69.53	59.14	52.02	48.45	44.88	42.86	40.89	38.86	37.24	27.67	18.43	
L-S													
(HZN)	423.37	354.57	348.21	333.86	331.25	320.03	327.51	326.81	325.08	325.44	323.40	322.64	
	181.45	32.65	18.28	11.03	9.33	7.18	5.50	4.80	3.08	3.52	1.56	0.71	
	238.60	92.68	67.12	55.63	40.14	43.05	41.31	37.94	35.70	33.78	23.35	14.51	
	250.35	98.26	60.56	56.80	58.82	44.52	41.60	38.26	36.81	33.96	23.48	14.53	
L-S													
(VBL)	559.48	482.18	369.75	356.06	349.80	344.08	340.58	338.37	336.24	334.82	328.40	324.76	
	247.48	88.26	47.83	34.14	27.17	22.87	18.57	16.45	14.32	12.08	6.56	2.83	
	455.24	128.26	88.15	63.68	54.80	48.38	44.86	40.78	38.28	35.87	24.80	14.78	
	518.16	144.58	93.34	72.25	61.25	53.11	48.56	43.98	40.78	38.11	24.96	14.07	
PWM													
	366.11	341.17	333.61	329.83	328.80	326.13	325.23	325.81	324.80	323.93	322.64	322.35	
	44.18	19.25	11.69	7.01	6.17	4.21	3.31	3.80	2.17	2.08	0.72	0.42	
	124.75	88.17	63.70	54.37	48.44	43.87	41.37	38.06	36.61	34.78	24.68	15.58	
	132.35	82.45	64.85	54.05	48.84	44.87	41.58	38.88	36.68	34.76	24.60	15.58	
IWAI													
	339.51	321.01	316.71	314.58	313.58	313.11	312.78	312.78	312.44	312.36	312.42	312.67	
	17.50	-8.01	-5.22	-7.42	-8.34	-8.81	-9.23	-9.22	-9.40	-9.57	-9.51	-9.25	
	184.68	67.33	53.35	45.25	48.57	36.73	34.51	32.27	30.40	28.86	28.46	12.04	
	106.05	67.33	53.61	45.86	41.42	37.77	35.72	33.66	31.93	30.60	22.56	16.08	
SXTL													
	549.04	427.08	327.30	362.74	368.38	323.11	344.26	345.16	321.02	337.26	338.73	325.63	
	228.02	166.05	5.38	48.82	38.38	1.10	22.33	23.24	8.88	15.34	8.88	3.71	
	151.10	91.05	68.58	57.25	51.67	42.40	42.52	48.18	35.46	35.84	24.76	15.44	
	273.60	148.36	68.82	78.32	64.36	42.58	48.82	46.42	35.46	38.25	26.28	15.88	
ISHI													
	325.44	325.75	324.21	323.68	323.36	322.61	322.31	322.35	322.24	322.07	322.19	322.66	
	3.52	3.83	2.29	1.67	1.44	0.60	0.30	0.32	0.32	0.15	0.26	0.74	
	85.45	67.42	57.87	52.88	47.80	44.44	42.74	40.88	38.87	37.20	28.88	18.84	
	85.52	67.53	57.02	52.03	47.01	44.45	42.74	40.88	38.87	37.20	28.88	18.86	

表 2.4: 100 年確率降水量の RMSE の小さい順位 [対数正規分布]

母数推定法	$N=10$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
最尤法	10	9	9	8	8	9	6	5	4	3	3	2	
積率法 (標本歪)	2	1	2	2	2	2	2	3	6	5	7	8	
積率法 (不偏歪)	3	2	3	3	3	3	3	4	7	5	7	7	
積率法 (B-R 歪)	4	5	5	5	5	8	8	8	8	7	9	9	
石原・高瀬法	1	4	4	4	4	6	7	7	9	8	10	10	
最小二乗法 (Weibull)	9	10	10	10	9	10	10	9	10	8	5	3	
最小二乗法 (Hazen)	7	7	8	7	7	7	5	2	3	2	2	1	
PWM 法	6	6	7	6	6	5	4	6	5	4	4	4	
岩井改良法	5	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6	
Sextile 法	8	8	6	9	10	4	9	10	2	10	6	5	

たというだけであり、良い母数推定値が得られたとは必ずしも言えない。母数推定法としての優劣は RMSE で評価するのが基本であるが、表 2.2 の結果も一つの目安となる。この表から次のようなことがわかる。

1. データ数が少ないとき、どの推定法によってもよい推定ができないことが多い。 $N=20$ 程度のデータ数では約 1 割程度のデータセット (標本) に対して母数推定がうまくできない。
2. 積率法は、石原・高瀬の方法も含めて、他の方法に比べて母数推定がうまくいかないことが多い。上述のように、データ数 N が小さい標本では標本歪が負となることが少なくないので、標本歪係数 (あるいはその修正値) を直接用いる積率法の場合、特に、不利であると言える。
3. 積率法を除けば、 $N=100$ 程度で棄却される標本の数が 1% 程度になり、 $N=200$ では皆無である。中でも、最尤法、最小二乗法、Sextile 法が良好である。

以下では、棄却されなかった (すなわち、母数推定に成功した) データセットに対して 100 年確率降水量の期待値、偏倚、推定誤差、RMSEなどを求め、各母数推定法の優劣を比較するが、上のように母数推定がうまくいきにくい場合があることに留意しなければならない。

a) 極値降水量の場合

表 2.3 に、シミュレーション回数 $M=5000$ のとき、極値降水量の 100 年確率降水量 x_{100} の期待値、Bias, Sd, RMSE を示した。100 年確率降水量の真値は 321.92 mm である。各推定法について、上下方向に四つずつ並んだ数字の上から順に x_{100} の期待値 $E[\hat{x}_{100}]$, Bias ($= E[\hat{x}_{100} - x_{100}]$), 推定誤差 $Sd[\hat{x}_{100}]$, RMSE である。また、最尤法の欄のすぐ上には、標本歪の平均値と標準偏差を示した。RMSE の順位 (小さい順) を表 2.4 に、Bias の順位を表 2.5 に示した。これらの表から、次のようなことが言える。

1. どの母数推定法も、 N が増加すると RMSE は減少する (すなわち、良い推定値が得られるようになる)。
2. 表 2.2 で棄却した標本数が比較的少なかった最尤法、最小二乗法、Sextile 法は、 $N \leq 20$ で母数推定値がかなり悪い。すなわち、棄却はしなかったけれども、母数推定が必ずしも良好ではなかったのである。一方、積率法などは、棄却しなかった標本に対しては悪くない母数推定値を得ている。
3. 積率法 (標本歪) と 積率法 (不偏歪) は負の Bias を与える (すなわち、100 年確率降水量を過小評価する傾向がある)。両者の比較では、積率法 (標本歪) の方が偏り Bias が若干大きい、推定誤差 Sd は逆に小さいので RMSE で見ると積率法 (不偏歪) より良い。積率法 (B-R 歪) は、 $N \leq 50$ までは正の Bias を与えるが、さらにデータ数が増えると小さな負の Bias となる。Bobée-Robitaille の歪係数補正式を用いると、 $N \geq 50$ で Bias はかなり抑えられるが、Sd は標本歪や不偏歪を用いる場合に比べて大きい。
4. 石原・高瀬の方法は、Bias が常に小さいという特長をもつ。しかし、データ数が増えても Sd が相対的に小さくならないので $N > 50$ では RMSE の評価が 6 位以下に下がってしまう。この方法は、小標本 ($N \leq 30$) に対してかなり有効であると言える。

表 2.5: 100 年確率降水量の Bias の小さい順位 [対数正規分布]

母数推定法	$N=10$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
最尤法	10	8	8	7	7	7	4	4	5	4	5	5	
積率法 (標本歪)	4	4	6	4	4	6	7	7	8	7	7	7	
積率法 (不偏歪)	2	3	3	3	3	5	6	6	7	6	6	6	
積率法 (B-R 歪)	3	5	2	2	1	1	1	2	3	2	3	2	
石原・高瀬法	1	2	1	1	1	2	2	1	2	1	1	4	
最小二乗法 (Weibull)	9	9	10	9	9	10	9	9	10	9	8	8	
最小二乗法 (Hazen)	7	7	9	8	8	8	5	5	6	5	4	3	
PWM 法	6	6	7	6	5	4	3	3	4	3	2	1	
岩井改良法	5	1	4	5	6	9	8	8	9	8	10	10	
Sextile 法	8	10	5	10	10	3	10	10	1	10	9	9	

5. 岩井改良法は、 $30 \leq N \leq 200$ のとき、RMSE が第 1 位である。しかしながら、Bias を見ると $N \geq 30$ においてかなり大きな負の Bias を示している。大きな Bias をもつにもかかわらず、RMSE が小さいということは、すなわち、推定誤差分散 $\text{Var} (= \text{Sd})$ が最も小さいということである。こうした点で“安定な”推定法であると言えるが、確率水文量の過小評価の傾向があることに留意しなければならない。
6. 最尤法は、 $N \leq 50$ では良い推定値を与えないが、 N が大きくなるにつれ RMSE も Bias もかなり小さくなってゆく。
7. 最小二乗法 (Hazen) と最小二乗法 (Weibull) の比較では、常に前者が優越する。前章でも触れたように、Weibull 公式は母数推定において大きな偏りをもたらす推定法であることがここでも確認された。Hazen 公式を用いる最小二乗法は N が大きいとき (≥ 80)、良い推定値を与える。3 母数対数正規分布の場合、最尤法よりも良い結果を与えと言える。
8. PWM 法は、 N が 40 程度より大きくなると比較的良い推定値を与える。特に、 N が 200 程度以上になると Bias が非常に小さくなる。RMSE で見ると、 $N \leq 70$ までは最尤法に優越するが、石原・高瀬法、積率法 (B-R 歪)、岩井改良法などに及ばない。それ以上では、最小二乗法 (Hazen) や最尤法には及ばない。
9. Sextile 法は、 N が 6 の倍数のとき RMSE、Bias どちらも比較的小さくなるが、そうでないときにはあまり良いとは言えない。

このように母数推定法には、それぞれ特徴があり、 N の大きさに応じて適宜使い分ける必要がある。 N によって、上の結果を再整理してみよう。

1. 小標本の場合、最尤法、最小二乗法は良くない。 $N = 10, 20$ のとき、最尤法、最小二乗法の RMSE は極端に大きくなる。このとき、積率法 (石原・高瀬の方法を含む) の RMSE は小さい。すなわち、小標本のとき積率法が良いと言える。ただし、表 2.2 で見たように、母数推定がうまくいかないことが 2 割程度あるので、それらの積率法を試みてその中で母数推定がうまくいくものを選ぶ必要がある。
2. $30 \leq N \leq 100$ では、石原・高瀬の方法、積率法 (B-R 歪) を用いるのがよさそうである。Bias が小さいうえ、Sd もさほど大きくない。ただし、母数推定がうまくいかないことが、 $N = 40, 60, 80, 100$ に対して、それぞれ 12, 8, 4, 2 % の割合で起こる。この点から言えば、 $N \geq 60$ では PWM 法が良い (若干偏りは大きい RMSE が小さい)。 $N \geq 80$ では 最小二乗法 (Hazen) が良い。
3. N が 100 を超えると、RMSE で見ると、最小二乗法 (Hazen)、最尤法が良い。Bias のみに着目すれば、PWM 法、積率法 (B-R 歪)、石原・高瀬法も良く、Sd は最小二乗法 (Hazen)、最尤法に比べて若干大きい (真値 321.92 mm に対して高々数 mm) 程度である。

小標本で積率法が良い理由の一つに標本統計量の algebraic boundedness があると思われる。積率法は資料から求めた平均、分散、歪係数を用いる。特に、歪係数は標本の大きさ (データ数) N に依存する上限、下限があ

ることを Kirby が理論的に導出して、algebraic boundedness と命名した (Kirby (1977))。歪係数の algebraic boundedness は次式で示される。

$$\bar{x} = 1/N \sum_{i=1}^N x_i, s_N^2 = 1/N \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \text{ のとき}$$

$$\frac{N-2}{\sqrt{N-1}} < C_s = \frac{1/N \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3}{s_N^3} < \frac{N-2}{\sqrt{N-1}} \quad (2.75)$$

この式から N が小さくなると、 C_s の変動する範囲は小さくなることがわかる。この結果として、母数推定値、確率水文学の変動、すなわち RMSE が小さくなる。積率法の Bias を見ると、標本歪係数、不偏歪係数を用いたとき Bias が常に負で比較的大きい値であるが、Bobée-Robitaille の補正式や石原・高瀬法によれば、その Bias がかなり補正される。

RMSE を評価規準とする場合の問題点について言及しておこう。母数推定法により、Bias は大きい Sd はかなり小さい場合と、Bias, Sd のどちらもある程度小さい場合の二つがある (図 2.1)。前者は、たとえば、岩井改良法であり、後者は N が大きいときの最小二乗法、最尤法である。RMSE により母数推定法を比較するとき、この点に留意しなければいけない。表 2.3 から、岩井改良法は常に RMSE の評価は優れているが、約 9mm 程度の負の Bias があり、確率水文学を危険側に評価してしまうことになる。逆に、最小二乗法、最尤法はわずかに正の Bias があり、確率水文学を安全側に評価する。

上の検討は、再現期間 100 年の場合のものであるが、他のリターンピリオド (50 年や 200 年) についても同様のことが言える。

b) 極値流量の場合

極値流量の 100 年確率水文学量に関して求めた結果を、表 2.6、表 2.7、表 2.8 に示す。極値降水量の場合とはほぼ同じ結果である。

2.3 Gumbel 分布への適用

2.3.1 Gumbel 分布

ある母集団から得られた 1 組のデータ (標本) 中の最小値および最大値 (いわゆる極値 (extreme value)) がどのような分布に従うかという問題を取り扱うのが極値統計論であり、1920 年代後半に Fréchet, Fisher, Tippet らによって理論的に考察された。母集団分布にある仮定をおけば、標本の大きさが無限大に近づくとき、極値の分布は、仮定した母集団分布に応じてそれぞれ異なる分布に漸近する。母集団分布に指数タイプ、Cauchy タイプ、有限タイプのものを仮定した場合に導かれる分布を、それぞれ極値に関する第 I 種、第 II 種、第 III 種漸近分布と呼ぶ (Gumbel (1958))。

1940 年から 1950 年代にかけて、最大値に関する第 I 種漸近分布が年最大洪水流量に良い適合性を得ることが Gumbel によって確かめられたので、この分布は Gumbel 分布と呼ばれるようになった²。

Gumbel 分布の確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(x) = \alpha \exp[-\alpha(x-u) - \exp\{-\alpha(x-u)\}] \quad (2.76)$$

Gumbel 分布の母数推定法を比較評価した研究には、次のようなものがある。Lowery and Nash (1970) は、積率法、回帰法 (Weibull 公式を用いた最小二乗法)、Gumbel 法、最尤法の 4 方法を比較し、積率法が良いとしている。³ Landwehr et al. (1979) は、PWM 法と最尤法、積率法の比較評価を行っている (後述)。Lettenmaier and Burges (1982) は、Gumbel が提唱し慣用されてきた手法の欠点を指摘し、さらに、積率法と最尤法の比較を行った。積率法では不偏分散より標本分散を用いる方が良く、また、小標本 ($N=30$) でリターンピリオドの大きい再現確率統計量の推定には、積率法より最尤法の方が若干良い結果を示すとしている。Raynal and Salas (1986) は、積率法、最尤法、Weibull 公式を用いた最小二乗法、PWM 法、MIR (mode and interquartile range) 法、BLOCOS (best linear combination of order statistics) 法を比較検討した。その結果、最尤法が最も優れているが母数推定値に偏倚があり、偏倚の小さい推定法の中では、データ数が 20 以下のとき BLOCOS 法、さらにデータ数が多いとき PWM 法が良いことを示した。また、Weibull 公式を用いた最小二乗法、MIR 法は Gumbel 分布の母数推定に

² この分布を最初に誘導した Fisher と Tippet の名をとって FT-I 分布、あるいはその式形から二重指数分布と呼ばれることもある。

³ 最尤法を否定しているのではないが、当時としては計算が煩雑なため最尤法の採用には積極的ではない。

表 2.6: 100 年確率流量の期待値, Bias, Sd, RMSE [対数正規分布; 真値 31692.38]

R.P. = 100(YR), QUANTILE = 31692.38														
SIZE	N= 10	N= 20	N= 30	N= 40	N= 50	N= 60	N= 70	N= 80	N= 90	N= 100	N= 200	N= 500	N= 1000	
C.S.														
MEAN	0.6025	0.0002	1.0202	1.1176	1.1885	1.2330	1.2641	1.2965	1.3224	1.3480	1.4488	1.5145		
S.D.	0.4547	0.5511	0.5747	0.5887	0.5761	0.5697	0.5577	0.5382	0.5268	0.5163	0.4778	0.3646		
MLE	*****	35523.57	33441.82	32750.22	32548.33	32337.34	32281.84	32148.03	32050.76	32017.68	31856.83	31782.28		
	*****	3831.10	1749.64	1066.84	847.05	644.06	588.66	448.55	367.38	325.23	163.65	80.01		
	*****	13882.37	7304.31	5817.30	5008.02	4514.45	4220.40	3853.35	3630.41	3435.12	2353.23	1454.44		
	*****	14324.22	7518.71	5014.32	5161.86	4568.20	4250.07	3870.37	3657.01	3458.48	2358.02	1457.22		
MOM	38483.18	31162.67	31132.58	31078.61	31082.40	31068.37	31073.48	31080.84	31007.67	31102.12	31267.85	31403.48		
(CS0)	-1280.28	-520.78	-550.88	-613.77	-680.89	-632.81	-618.07	-683.33	-504.78	-508.26	-424.53	-198.08		
	8508.69	6587.01	5530.67	4011.12	4475.42	4146.08	3072.64	3822.16	3634.82	3582.53	2640.18	1881.87		
	8683.38	6600.17	5558.03	4040.32	4516.70	4194.78	4828.57	3860.40	3683.15	3551.02	2682.08	1812.82		
MOM	38071.53	31388.64	31201.86	31128.50	31130.01	31007.82	31118.21	31128.07	31142.47	31140.25	31203.71	31584.01		
(CS1)	-720.85	-301.74	-460.52	-563.70	-553.36	-504.56	-574.17	-583.41	-548.01	-543.12	-308.66	-187.47		
	8683.11	6682.12	5544.30	4038.77	4490.52	4160.22	3086.54	3834.83	3645.88	3580.90	2653.18	1882.55		
	8712.08	6613.73	5566.85	4078.85	4533.42	4211.48	4827.67	3875.28	3687.12	3551.76	2682.07	1812.27		
MOM	32586.87	32370.21	32072.47	31025.56	31036.38	31714.17	31653.28	31636.28	31612.03	31584.38	31550.50	31630.43		
(B-R)	004.49	686.83	388.89	233.18	143.02	21.70	-20.17	-56.18	-78.45	-188.88	-132.70	-52.05		
	8014.39	6918.66	5081.33	5287.83	4843.37	4470.70	4285.85	4888.61	3885.56	3722.86	2763.73	1842.30		
	8960.78	6952.67	5013.56	5202.17	4845.51	4478.84	4285.95	4880.88	3886.37	3724.43	2766.01	1843.86		
L-S	41813.65	34054.74	33528.06	32887.11	32628.82	32484.30	32252.28	32184.12	32001.83	32047.48	31848.53	31763.78		
(HZN)	18121.27	3262.36	1828.58	1104.74	935.64	712.81	550.82	401.74	308.65	355.82	156.16	71.32		
	23832.31	9268.85	6711.88	5561.05	4013.41	4304.68	4131.08	3793.17	3570.33	3376.38	2331.02	1458.27		
	25892.46	9826.31	6956.51	5688.82	5081.71	4451.00	4168.76	3824.01	3681.46	3304.07	2337.14	1452.83		
L-S	56454.81	30712.32	36477.86	35187.81	34498.66	33890.56	33551.83	33338.42	33124.31	32983.85	32348.58	31976.21		
(WBL)	24762.43	8010.04	4784.69	3414.64	2716.20	2287.10	1858.65	1646.84	1431.03	1208.67	656.13	283.83		
	45338.78	12826.43	8813.48	6367.11	5480.86	4830.51	4486.13	4070.27	3810.62	3586.77	2488.17	1468.75		
	51835.88	14455.26	9333.23	7224.95	6124.38	5318.89	4855.02	4388.86	4070.21	3811.02	2405.06	1405.03		
PWM	36118.74	33617.27	32861.14	32483.88	32390.04	32113.33	32823.47	32081.06	31090.26	31802.78	31764.46	31734.75		
	4418.36	1024.08	1168.77	708.78	616.66	428.95	331.80	388.68	216.80	288.33	72.88	42.37		
	12475.45	8016.08	6370.88	5437.31	4844.41	4386.71	4136.88	3896.83	3651.87	3460.87	2468.34	1557.71		
	13234.75	8244.83	6485.27	5404.58	4883.58	4486.86	4158.82	3888.24	3667.40	3475.65	2460.30	1558.20		
IWAI	33527.23	31768.64	31253.82	31048.65	30940.38	30800.46	30888.52	30882.88	30858.08	30852.51	30857.17	30881.68		
	1834.85	76.26	-430.36	-651.73	-742.00	-782.02	-811.86	-880.57	-833.48	-830.87	-835.21	-819.78		
	19643.63	6051.27	5302.57	4574.68	4115.80	3718.76	3485.54	3250.16	3108.76	2942.27	2863.87	1384.78		
	18782.18	6061.69	5418.44	4628.87	4102.41	3888.28	3578.84	3358.21	3218.53	3050.70	2226.47	1536.86		
SXTL	53849.41	42803.63	32238.22	33668.16	35431.01	31811.17	33868.76	33056.78	31602.56	33187.94	32558.40	32054.57		
	22157.83	18311.26	537.84	3076.54	3730.54	118.88	2254.32	8.18	1404.66	858.12	362.10	362.10		
	15877.66	9178.05	6058.48	5721.81	5161.18	4248.57	4240.65	4614.71	3545.71	3503.50	2475.11	1543.87		
	25808.56	13700.58	6882.22	6066.83	6373.46	4258.23	4774.53	4686.24	3545.71	3880.80	2510.64	1585.70		
ISHI	32844.11	32875.27	31921.52	31850.70	31836.58	31761.23	31731.57	31735.56	31724.82	31786.08	31718.78	31765.24		
	351.74	382.80	220.14	167.41	144.12	68.86	30.10	43.18	31.64	14.68	26.48	73.87		
	8544.07	6742.34	5787.19	5288.80	4780.22	4444.35	4273.63	4070.40	3887.88	3720.25	2887.03	1884.24		
	8562.28	6753.28	5701.64	5282.78	4701.38	4444.88	4273.81	4070.72	3887.21	3720.27	2888.05	1885.60		

表 2.7: 100 年確率流量の RMSE の小さい順位 [対数正規分布]

母数推定法	$N=10$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
最尤法	10	9	9	8	8	9	6	5	4	3	3	2	
積率法 (標本歪)	2	1	2	2	2	2	2	3	6	6	8	8	
積率法 (不偏歪)	3	2	3	3	3	3	3	4	7	5	7	7	
積率法 (B-R 歪)	4	5	5	5	5	8	8	8	8	7	9	9	
石原・高瀬法	1	3	4	4	4	6	7	7	9	8	10	10	
最小二乗法 (Weibull)	9	10	10	10	9	10	10	9	10	10	5	3	
最小二乗法 (Hazen)	7	7	8	7	7	7	5	2	3	2	2	1	
PWM 法	6	6	7	6	6	5	4	6	5	4	4	5	
岩井改良法	5	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	
Sextile 法	8	8	6	9	10	4	9	10	2	9	6	6	

用いるべきでないとしている。Phien (1987) は、積率法、最尤法、最大エントロピー法、PWM 法の比較を行っており、最尤法の優位性を示しているが、偏倚がやや大きいこと、PWM 法の偏倚は小さいが RMSE は大きく、最大エントロピー法が最尤法に次いで良いことを示した。Jain and Singh (1987) は、米国における 104 ~ 2,500km² の面積をもつ 55 流域の年洪水データに七つの方法 (積率法、PWM 法、混合積率 (mixed moments) 法、最尤法、不完全平均 (incomplete means) 法、最大エントロピー法、最小二乗法) で Gumbel 分布をあてはめた。それらのうち最尤法が最も良く、続いて最大エントロピー法、PWM 法、積率法の順に良いが、それらの差はあまり大きくないとしている。

2.3.2 Gumbel 分布の母数推定法

この節では、以下の母数推定法を比較評価する。

- 最尤法
- 最小二乗法
- 積率法
- PWM 法
- 最大エントロピー法

以下にこれらの手法について簡単に説明を加える。

a) 最尤法

Gumbel 分布の最尤法による解は、1.6.3 の (1.27), (1.28) の二つの式を解いて与えられる。ここでは、3 母数対数正規分布と同様に、FACOM SSLII の DMINF1 を用いて尤度関数を最大化するような α と u を求める。

b) 最小二乗法

3 母数対数正規分布の場合と同様に、SSE を目的関数として DMINF1 を用いる。ここでも、Hazen 公式と Weibull 公式の二通りについて検討する。

c) 積率法

Gumbel 分布は 2 母数の分布であるから、2 次までの積率 (平均値 μ と分散 σ^2) を用いることにより、母数が推定できる。すなわち、以下の関係を用いる。

$$\mu = u + \frac{\gamma_E}{\alpha} \approx u + \frac{0.5772}{\alpha} \quad (\gamma_E : \text{Euler 定数}) \quad (2.77)$$

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\alpha^2} \approx \frac{1.6449}{\alpha^2} \quad (2.78)$$

表 2.8: 100 年確率流量の Bias の小さい順位 [対数正規分布]

母数推定法	$N=10$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
最尤法	10	7	8	7	7	7	4	4	5	4	5	5	
積率法 (標本歪)	4	4	6	4	4	6	7	7	8	7	7	7	
積率法 (不偏歪)	2	3	4	3	3	5	6	6	7	6	6	6	
積率法 (B-R 歪)	3	5	2	2	1	1	1	2	3	2	3	2	
石原・高瀬法	1	2	1	1	2	2	2	1	2	1	1	4	
最小二乗法 (Weibull)	9	9	10	9	9	10	9	9	10	9	8	8	
最小二乗法 (Hazen)	7	8	9	8	8	8	5	5	6	5	4	3	
PWM 法	6	6	7	6	5	4	3	3	4	3	2	1	
岩井改良法	5	1	3	5	6	9	8	8	9	8	9	10	
Sextile 法	8	10	5	10	10	3	10	10	1	10	10	9	

標本平均, 標本分散 (不偏分散) をこれらの式に代入して母数推定値 $\hat{\alpha}, \hat{u}$ を求める。

d) PWM 法

具体的な解法については, 2.2.2 で述べた通りである。Gumbel 分布の PWM と母数との関係は次式で与えられる。

$$M_j = \frac{u}{1+j} + \frac{\ln(1+j) + \gamma_E}{\alpha(1+j)} \quad (2.79)$$

ここに, j は非負の整数である。 M_0, M_1 を用いると,

$$\alpha = \frac{\ln 2}{2M_1 - M_0} \quad (2.80)$$

$$u = M_0 - \frac{\gamma_E}{\alpha} \quad (2.81)$$

であり, (2.65) 式の標本 PWM をこれらの式に代入することにより母数推定値 $\hat{\alpha}, \hat{u}$ を求める。

Landwehr et al. (1979) は, Monte Carlo シミュレーションにより, この PWM 法と最尤法, 積率法の比較を行っている。Gumbel 分布に従う乱数を発生させて, それが系列相関をもたない場合ともつ場合について検討し, 前者の場合 PWM 法が母数, 再現確率統計量 (quantiles, 確率水文学) の不偏推定値を与え, 後者の場合でも他の二つの推定法よりも小さい偏倚をもつ推定量を与えることを示した。最尤法はどちらの場合に対しても母数 α と再現確率統計量の最小分散推定を与え, PWM 法は母数 u に対して最小分散推定を与える。積率法による再現確率統計量の分散は, 小標本でリターンピリオドの大きい部分についてのみ PWM 法より小さい。全体として最尤法が良いが, 小標本で系列相関があり非超過確率が 0.5 より小さいときには PWM 法が良いことを示した。

e) 最大エントロピー法

エントロピーは, Boltzmann が “a measure of our degree of ignorance as to its true state” と定義して, Shannon が情報理論に応用した概念である。高棹・池淵 (1969, 1975, 1980) は, 水文流出系 (長期流出) の解析にエントロピーの概念を導入し, さらに, 降水観測がもたらす情報量, 降雨・流出変換特性の解析にもこの概念を取り入れた。

Sonuga (1972) は, 最大エントロピー原理から最大エントロピー分布なる確率密度関数を決定する方法を提案した。この手法は, 標本から得られる母集団に関する情報は積極的に取り入れ, それ以外にはなるべく確率変数がランダムに発生する (すなわち, エントロピーを最大にする) ような確率密度関数を求めるものであり, その後, 寒川によって詳細に検討されている (寒川ら (1986), 寒川 (1988))。エントロピー $H(x)$ は次式で定義される。

$$H(x) = - \int p(x) \ln p(x) dx \quad (2.82)$$

ここに, $p(x)$ は確率密度関数であり,

$$\int p(x) dx = 1 \quad (2.83)$$

である。ある任意関数 $g_r(x)$ が与えられたとき、

$$\int g_r(x)p(x)dx = E[g_r(x)], \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (2.84)$$

である。この制約条件のもとで $H(x)$ を最大にする $p(x)$ が最大エントロピー分布である。いま, $g_r(x)$, $(-\infty < x < \infty)$ が

$$g_1(x) = 1 \quad (2.85)$$

$$g_2(x) = \alpha(x - u) \quad (2.86)$$

$$g_3(x) = \exp\{-\alpha(x - u)\} \quad (2.87)$$

のとき, (2.84) 式を

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad (2.88)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x - u)p(x)dx = E[\alpha(x - u)] = \gamma_E \quad (\text{Euler 定数} = 0.5772 \dots) \quad (2.89)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha(x - u)\}p(x)dx = E[\exp\{-\alpha(x - u)\}] = 1 \quad (2.90)$$

とすると, この制約条件のもとで $H(x)$ を最大にする $p(x)$ は

$$p(x) = \alpha \exp[-\alpha(x - u) - \exp\{-\alpha(x - u)\}] \quad (2.91)$$

すなわち, Gumbel 分布の確率密度関数となる (Jowitt (1979))。このように, ある関数 $g_r(x)$ が与えられたとき, 最大エントロピー分布は既存の確率分布モデルとなることが知られている (たとえば, 高樟・池淵 (1980))。この $g_r(x)$ に含まれるパラメタ, すなわち母数を推定する方法が最大エントロピー法である。最大エントロピー法を Gumbel 分布に適用した場合の母数および再現確率統計量の推定誤差については Phien (1986) によって検討されている。

いま, N 個の資料 x_1, x_2, \dots, x_N が与えられたとき, (2.89) 式, (2.90) 式は

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i = \gamma_E \quad (2.92)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp(-s_i) = 1 \quad (2.93)$$

となる。ここに, $s_i = \alpha(x_i - u)$ である。この式から α に関する方程式が得られる。

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp\{-\alpha(x_i - \bar{x})\} = \exp(\gamma_E) \quad (2.94)$$

ここに, \bar{x} は X の標本平均である。これを解いて, 最大エントロピー法による α の推定値 $\hat{\alpha}$ が得られる。 u の推定値は次のようになる。

$$\hat{u} = \bar{x} - \frac{\gamma_E}{\hat{\alpha}} \quad (2.95)$$

本論文では, (2.94) 式を Newton 法を用いて解くことにする。

2.3.3 結果と考察

想定する母数 α, u の値は, 表 2.1 に示した通りである。なお, Gumbel 分布に対する Monte Carlo シミュレーションでは, 棄却したデータは皆無であった。

表 2.9 に 100 年確率降水量の期待値, Bias, Sd, RMSE, 表 2.10, 2.11 には RMSE, Bias の順位を示した。これらの表から以下のようなことが言える。

1. RMSE は N の大きさにかかわらず, 最尤法, 最大エントロピー法, PWM 法, 積率法の順に良い。

R.P. = 100(YR), QUANTILE = 102.00													
SIZE	N= 10	N= 20	N= 30	N= 40	N= 50	N= 60	N= 70	N= 80	N= 90	N= 100	N= 200	N= 500	N=1000
C.S.													
MEAN	0.6275	0.7646	0.8366	0.8847	0.9244	0.9527	0.9695	0.9800	1.0001	1.0156	1.0748	1.1104	1.1250
S.D.	0.4328	0.5028	0.5064	0.5033	0.4944	0.4745	0.4555	0.4416	0.4270	0.4104	0.3341	0.2331	0.1714
MLE	184.31	187.50	189.13	189.91	190.31	190.54	190.85	191.01	191.11	191.08	191.50	191.76	191.90
	-7.70	-4.41	-2.87	-2.09	-1.60	-1.46	-1.16	-0.90	-0.80	-0.92	-0.50	-0.24	-0.11
	32.37	23.08	18.50	16.08	14.31	13.00	12.08	11.29	10.60	9.89	7.10	4.48	3.18
MOM	33.27	23.49	18.72	16.14	14.41	13.17	12.14	11.33	10.73	9.94	7.11	4.49	3.18
	192.53	191.00	190.97	191.08	191.20	191.23	191.30	191.38	191.30	191.37	191.68	191.82	191.92
	0.52	-1.01	-1.04	-0.92	-0.80	-0.77	-0.71	-0.62	-0.61	-0.63	-0.32	-0.18	-0.09
L-S (HZN)	38.38	27.46	22.33	19.45	17.49	15.98	14.87	13.79	13.18	12.15	8.79	5.60	3.99
	38.39	27.48	22.36	19.47	17.51	16.00	14.88	13.81	13.19	12.17	8.80	5.60	3.99
	202.31	197.20	195.66	194.95	194.52	194.11	193.87	193.70	193.51	193.33	192.83	192.37	192.23
L-S (VBL)	10.31	5.20	3.66	2.95	2.52	2.11	1.86	1.69	1.51	1.33	0.82	0.37	0.22
	42.58	29.57	23.66	20.47	18.32	16.64	15.40	14.26	13.61	12.54	8.97	5.67	4.01
	43.81	30.02	23.94	20.68	18.49	16.77	15.51	14.36	13.69	12.61	9.01	5.68	4.02
PWM	228.93	213.57	208.04	205.10	203.23	201.79	200.76	199.98	199.30	198.71	196.11	194.05	193.22
	36.93	21.57	16.03	13.10	11.23	9.78	8.76	7.90	7.29	6.78	4.11	2.05	1.22
	51.93	33.96	26.47	22.55	19.95	17.97	16.51	15.22	14.46	13.29	9.32	5.79	4.07
PME	63.72	40.23	30.95	26.08	22.90	20.46	18.69	17.10	16.10	14.88	10.10	6.14	4.25
	196.64	193.15	192.49	192.28	192.15	192.04	192.03	192.01	191.98	191.87	191.92	191.93	191.97
	4.64	1.15	0.49	0.27	0.15	0.04	0.03	0.01	-0.03	-0.13	-0.00	-0.07	-0.04
PHE	37.48	26.03	20.82	17.95	16.03	14.63	13.60	12.61	11.98	11.08	7.88	4.99	3.57
	37.77	26.06	20.83	17.96	16.03	14.63	13.60	12.61	11.98	11.08	7.88	4.99	3.57
	187.11	188.87	189.87	190.41	190.70	190.84	191.06	191.19	191.25	191.22	191.50	191.80	191.91
PHE	-4.89	-3.13	-2.14	-1.59	-1.31	-1.16	-0.94	-0.82	-0.75	-0.70	-0.42	-0.21	-0.10
	33.74	23.89	19.11	16.58	14.74	13.47	12.49	11.62	11.02	10.15	7.28	4.61	3.28
	34.09	24.09	19.23	16.57	14.80	13.52	12.52	11.64	11.04	10.18	7.29	4.61	3.28

表 2.9: 100 年確率降水量の期待値, Bias, Sd, RMSE [Gumbel 分布, 真値 192.00]

表 2.10: 100 年確率降水量の RMSE の小さい順位 [Gumbel 分布]

母数推定法	$N=10$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
最尤法	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
積率法	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
最小二乗法 (Weibull)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
最小二乗法 (Hazen)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
PWM 法	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
最大エントロピー法	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

表 2.11: 100 年確率降水量の Bias の小さい順位 [Gumbel 分布]

母数推定法	$N=10$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
最尤法	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
積率法	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
最小二乗法 (Weibull)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
最小二乗法 (Hazen)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
PWM 法	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
最大エントロピー法	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

2. Bias を見ると, $N \leq 20$ のとき 積率法, PWM 法, 最大エントロピー法, 最尤法の順に良く, $30 \leq N \leq 500$ のとき PWM 法, 積率法, 最大エントロピー法, 最尤法の順に良い。これらの結果は Phien (1987) の検討結果と概ね一致する。
3. 表 2.9 を見ると, PWM 法の Bias は極めて小さい。
4. また, 積率法は RMSE, Bias のどちらについても, 最小二乗法よりも良いと言える。積率法は RMSE が常に第 4 位で, Bias は $N \geq 30$ のとき第 2 位, $N \leq 20$ のとき第 1 位である。Gumbel 分布の場合, 積率法で母数を推定するとき 2 次までの標本積率, すなわち平均と分散を用いる。標本平均は不偏統計量であり, 標本分散も Bias の大きさは理論的に導かれているので, Bias を補正した不偏分散が一般的によく用いられる。そのため, 積率法は最小二乗法よりも良くなると考えられる。
5. Gumbel 分布の場合, 最小二乗法を用いるメリットはない。

極値流量の場合についても同様の検討を行ったが, 極値降水量の場合と全く同じ結果であった (宝・高樺・清水 (1989))。

2.4 一般化極値分布への適用

2.4.1 一般化極値分布

Jenkinson (1955) は, 最大値分布に従う変量が, その分布の形式にかかわらず, 次のような累積分布関数で統合的に表されることを示した。

$$F(x) = \begin{cases} \exp[-\{1 - k(x - x_0)/\alpha\}^{1/k}], & k \neq 0 \\ \exp[-\exp\{-(x - x_0)/\alpha\}], & k = 0 \end{cases} \quad (2.96)$$

母数は, k, α, x_0 の三つである。この分布は, その後, 一般化極値分布 (generalized extreme-value distribution, GEV 分布) と呼ばれ, 1975 年に Natural Environment Research Council によって, イギリス河川の日流量の年最大値の分布に推奨されて以来, イギリスでは水文頻度解析における重要な役割を担っている。海水位の極値にも用いられているようである (Prescott and Walden (1983))。Arnell et al. (1986) は, この分布に対する不偏なプロットイング・ポジション公式を提案している。

母数 $k = 0$ のとき, GEV 分布は Gumbel 分布 (最大値に関する第 I 種極値分布) に一致し, また, $k < 0, k > 0$ に対応する特別な場合が, それぞれ第 II 種, 第 III 種極値分布である。 $k \neq 0$ のとき, $F(x)$ は次のように変形できる。

$$F(x) = \exp\{-\exp(-s)\} \quad (2.97)$$

$$s = -\frac{1}{k} \ln \left[-\left\{ x - \left(x_0 + \frac{\alpha}{k} \right) \right\} / \left(\frac{\alpha}{k} \right) \right] \quad (2.98)$$

この式から, $k < 0, k > 0$ のとき, それぞれ対数極値分布 A 型, 対数極値分布 B 型 (角屋 (1956, 1964)) となることがわかる。

変量 X の平均 μ_x , 分散 σ_x^2 , 歪係数 β_x は次のようになる。

$$\mu_x = x_0 + \frac{\alpha}{k} \{1 - \Gamma(1+k)\} \quad (2.99)$$

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \{ \Gamma(1+2k) - \Gamma^2(1+k) \} \quad (2.100)$$

$$\beta_x = \frac{\Gamma(1+3k) - 3\Gamma(1+2k)\Gamma(1+k) + 2\Gamma^3(1+k)}{\{ \Gamma(1+2k) - \Gamma^2(1+k) \}^{3/2}} \quad (2.101)$$

ここに, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。

2.4.2 一般化極値分布の母数推定法

ここでは, 次の母数推定法を比較評価する。

- 最尤法
- 積率法
- PWM 法

これらについて, 以下に簡単に説明を加える。

a) 最尤法

GEV 分布の最尤法による解法は, Jenkinson (1969) や Prescott and Walden (1980, 1983) などの反復解法がある。ここでは, 前述の 3 母数対数正規分布や Gumbel 分布と同様, 最適化プログラム DMINF1 を用いて尤度関数を最大とするような母数推定値 $\hat{\alpha}, \hat{k}, \hat{x}_0$ を求める。

b) 積率法

GEV 分布は, 3 個の母数をもつので, 3 次までの積率を用いる。すなわち, (2.99), (2.100), (2.101) 式でそれぞれ与えられる平均, 分散, 歪係数を, 標本から得られるそれらと等しく置いて母数を推定する。ここでは, 標本歪係数と不偏歪係数の二通りの場合を考えた。

c) PWM 法

Hosking et al. (1985) は, PWM 法を GEV 分布に適用し, この分布に対する PWM 法の有用性を示した。 $k \neq 0$ に対する GEV 分布の PWM は次のようである。

$$M_j = \frac{x_0 + \alpha \{1 - (j+1)^{-k} \Gamma(1+k)\} / k}{j+1} \quad (2.102)$$

ここに, j は非負の整数であり, $k > -1$ である。母数 α, k, x_0 と PWM との関係は上式より,

$$M_0 = x_0 + \frac{\alpha \{1 - \Gamma(1+k)\}}{k} \quad (2.103)$$

$$2M_1 - M_0 = \alpha \Gamma(1+k) \frac{1 - 2^{-k}}{k} \quad (2.104)$$

$$\frac{3M_2 - M_0}{2M_1 - M_0} = \frac{1 - 3^{-k}}{1 - 2^{-k}} \quad (2.105)$$

で与えられる。データから標本 PWM を求め、上式に代入してこれらの式を解けば母数推定値 $\hat{\alpha}, \hat{k}, \hat{x}_0$ が得られる。Hosking et al. (1985) は、(2.105) 式を解くのに、 k に関する近似多項式

$$k = 7.8590c + 2.9554c^2 ; \quad c = \frac{2M_1 - M_0}{3M_2 - M_0} - \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad (2.106)$$

を定め、これを用いて母数推定値を求めている。ここでは、(2.105) 式を数値的に解いた。

2.4.3 結果と考察

想定する母数 x_0, α, k の値は、表 2.1 に示した通りである。なお、PWM 法において、以下のような条件となる標本は棄却した。

$$\Gamma(1 + \hat{k}) \frac{1 - 2^{-\hat{k}}}{\hat{k}} = 0 \quad (2.107)$$

このとき、(2.104) 式から $\hat{\alpha}$ が求められない。棄却された標本の数は極めて少なく、 $M = 1000$ のとき、 $N = 20, 40, 60, 80, 100, 200, 500, 1000$ に対してそれぞれ 8, 5, 4, 1, 4, 0, 0, 0 であった。最尤法、積率法については棄却された標本はない。

表 2.12, 2.13, 2.14 は、極値降水量の 100 年確率水文量 (真値は 191.82mm) に関して RMSE, Bias の値と順位を示したものである。これらの表から以下のことが言える。

1. 積率法は、データ数 N が 500 程度以上になってやっと真値に近い値を推定できるようになる。 $N \leq 200$ では、この分布に対しては使いものにならない。
2. 最尤法は $N \leq 100$ の範囲で確率水文量を過大評価する傾向がある。 $N \leq 200$ で、Bias, RMSE とともに小さくなる。 $N = 1000$ のとき RMSE, Bias のどちらについても最尤法が PWM 法より良い結果を与える。
3. $N \leq 500$ のとき PWM 法が常に第 1 位である。 N があまり大きくない場合 ($N \leq 100$ のとき)、PWM 法の RMSE は、最尤法の 1/2 以下である。また、Bias は、真値 191.82mm に対して、 $N = 10$ のときでも 17.02mm、 $N = 70$ 程度では 1mm 未満になる。PWM 法は GEV 分布に対して極めて優れた方法である。

最尤法の結果があまり良くない理由の一つに、overfitting があると思われる。一般化極値分布は、3 個の母数をもち、多様な形状の標本に適合し易い柔軟な構造を有しており、これに最適化手法を用いた最尤法を適用すると、標本ごとに良く適合する母数を求めることができるので、かえって確率水文量の推定誤差が大きくなってしまふ。標本サイズ N がかなり大きいとこの問題はなくなる。なお、Hosking et al. (1985) は、 $N = 15, 25, 50, 100$ について、PWM 法と最尤法、Sextile 法 (Jenkinson (1969)) とを比較している。 $k < 0$ のとき、本節で示したのと同様に、GEV 分布に対する最尤法が、分布の右裾の方の再現確率統計量 (リターンペリオド 100 年) の推定において、Bias と Sd がかなり大きくなり、また、Sextile 法は $N = 15, 25$ では PWM 法より若干それらの値が大きくなるが、 $N = 50, 100$ では PWM 法とあまり変わらないという結果を示している。極値流量の 100 年確率水文量に関しても同様の検討を行ったが、極値降水量と全く同じ結果であった。

2.5 結語

極値データの頻度解析においてしばしば用いられる 3 母数対数正規分布、Gumbel 分布、一般化極値 (GEV) 分布の種々の母数推定法を比較した。結果を簡単にまとめると以下ようになる。

1) 対数正規分布の母数推定法について

100 年確率水文量の RMSE に着目すると、岩井改良法が良い。しかしながら、かなり大きい負の Bias を有する。すなわち、危険側に評価するので、この母数推定法を用いるときには、確率水文量の推定値を安全側に補正してやる必要がある。この方法は、推定値のばらつきは小さいわけであるから、データ数やデータの基本統計量と Bias の大きさとの関係を定量的に適切に把握できれば、精度の良い確率水文量の推定が期待できることになる。

Bias が小さく RMSE も小さい推定法として、大標本 ($N > 100$) では最小二乗法 (Hazen) あるいは最尤法、小標本 ($N \leq 20$) では積率法が良い。 $30 \leq N \leq 100$ では、石原・高瀬法あるいは Bobée-Robitaille の補正歪係数を用いる積率法を用いるのが良さそうである。

本研究により、3 母数対数正規分布に対して、わが国で慣用されてきた岩井改良法や石原・高瀬法の特徴が明らかにされるとともに、確率水文量の推定精度という観点から、データ数ごとに適切な推定法が明らかとなった。

表 2.12: 100 年確率降水量の期待値, Bias, Sd, RMSE [GEV 分布; 真値 191.82]

R.P. = 100(YR), QUANTILE = 101.82													
SIZE	N= 10	N= 20	N= 30	N= 40	N= 50	N= 60	N= 70	N= 80	N= 90	N= 100	N= 200	N= 500	N=1000
C.S.													
MEAN	8.7418	8.0036	1.1453	1.2501	1.3347	1.3038	1.4363	1.4771	1.5041	1.5362	1.6810	1.7055	1.8477
S.D.	8.4882	8.6104	8.6506	8.6875	8.7855	8.7835	8.6082	8.6952	8.6911	8.6020	8.6531	8.5778	8.4854
MLE	238.88	238.54	213.43	212.00	200.04	190.06	201.17	190.14	190.35	190.26	192.45	192.83	191.81
	47.06	38.72	21.61	21.08	17.22	8.14	0.35	7.32	7.53	7.44	8.63	8.21	-0.01
	151.02	121.55	98.30	85.16	84.18	57.46	50.84	51.01	52.25	52.01	19.68	12.22	-0.01
	150.84	127.57	100.73	87.73	85.03	58.83	50.77	52.43	52.70	52.54	10.78	12.22	7.18
PMM	208.84	197.32	194.71	193.73	193.36	193.20	192.68	192.68	192.32	192.21	192.84	191.82	191.84
	17.02	5.50	2.80	1.91	1.54	1.30	0.86	0.78	0.58	0.30	0.23	-0.00	0.02
	74.63	53.87	43.88	37.50	33.81	30.20	28.22	25.07	24.08	23.03	16.30	10.26	7.38
	76.55	53.36	43.18	37.64	33.85	30.32	28.24	25.08	24.08	23.03	16.30	10.26	7.38
MOM	93.17	107.35	118.10	125.10	132.10	136.01	141.89	145.38	149.17	151.87	178.68	186.87	190.11
(CS0)	-08.65	-84.47	-73.71	-66.63	-59.64	-54.01	-49.04	-45.44	-42.65	-39.95	-21.22	-5.75	-1.71
	84.88	82.07	81.84	79.52	77.45	75.43	73.26	70.81	69.23	67.30	51.86	25.87	11.33
	138.08	118.48	100.55	103.74	97.75	93.38	88.66	84.14	81.31	78.34	56.84	26.50	11.46
MOM	188.75	114.03	123.21	120.02	135.73	140.16	144.54	148.67	151.49	154.08	171.40	186.25	190.14
(CS1)	-83.07	-76.80	-68.61	-61.08	-56.00	-51.66	-47.28	-43.14	-40.33	-37.74	-20.42	-5.57	-1.68
	88.84	83.78	80.88	78.89	76.76	74.55	72.36	69.87	68.16	66.24	51.80	25.52	11.33
	121.63	113.66	106.07	100.28	95.07	90.78	86.43	82.12	79.10	76.23	55.82	26.12	11.45

表 2.13: 100 年確率降水量の RMSE の小さい順位 [GEV 分布]

母数推定法	$N=10$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
最尤法	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
積率法 (標本歪)	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
積率法 (不偏歪)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
PWM 法	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2

表 2.14: 100 年確率降水量の Bias の小さい順位 [GEV 分布]

母数推定法	$N=10$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
最尤法	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
積率法 (標本歪)	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
積率法 (不偏歪)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
PWM 法	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2

2) Gumbel 分布の母数推定法について

最尤法, 最大エントロピー法, PWM 法, 積率法の順に良い。Bias で見ると PWM 法, 積率法が良い。最尤法の Bias は第 4 位であるが, N が 50 程度以上になるとその差はわずか (真値 192mm に対して 2mm 以内, $N \geq 80$ で 1mm 以内) であり, この程度データ数があれば最尤法が良いと言える。最大エントロピー法は最尤法とはほぼ同程度 (若干劣る) の性能を示すが, わざわざこの方法を用いるまでもない。データ数が 20 個程度以下であれば積率法, 40 個程度以下であれば PWM 法を用いるのがよい。

3) 一般化極値分布の母数推定法について

RMSE, Bias とともに文句無しに PWM 法が良い。大標本になると最尤法もかなり良い。この分布は, Gumbel 分布を含む極値分布を統合的に取り扱えるので, 非常に有用であると思われる。ただ, 比較的歴史が浅く, また, 母数推定法も, 2.4 で見たように, 積率法は良い推定値を与えないし, Jenkinson (1969) の Sextile 法や Prescott and Walden (1980, 1983) などの反復解法による最尤法以後, Hosking et al. (1985) の PWM 法と Arnell et al. (1986) のプロットイング・ポジション公式が提案されているにすぎないことから, 特にわが国においては, ほとんど用いられてこなかった。ここでの結果は, PWM 法の有用性を検証したものであるが, 実際の極値データへの適用を通じてこの GEV 分布, PWM 法の検証を重ねる必要があろう。

参 考 文 献

- Arnell, N.W., M. Beran and J.R.M. Hosking (1986): Unbiased Plotting Positions for the General Extreme Value Distribution, *Journal of Hydrology*, Vol. 86, pp.59-69.
- Bobée, B. and R. Robitaille (1975): Correction of Bias in the Estimation of the Coefficient of Skewness, *Water Resources Research*, Vol. 11, No. 6, pp. 851-854.
- Burges, S.J., D.P. Lettenmaier and C.L. Bates (1975): Properties of the Three-Parameter Log Normal Probability Distribution, *Water Resources Research*, Vol. 11, No. 2, pp. 229-235.
- Chow, V.T. (1954): The Log-Probability Law and Its Engineering Applications, *Proc. ASCE*, Pap. No. 536, Vol. 80, 25pp.

富士通 (株) (1980): FACOM FORTRAN SSL II 使用手引書, pp.403-406.

Greenwood, J.A., J.M. Landwehr, N.C. Matalas and J.R. Wallis (1979): Probability Weighted Moments — Definition and Relation to Parameters of Several Distributions Expressable in Inverse Form, Water Resources Research, Vol. 15, No. 5, pp. 1049-1054.

Gumbel, E.J. (1958): Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press, 1958, 375pp. (河田竜夫・岩井重久・加瀬滋男 (監訳): 極値統計学 — 極値の理論とその工学的応用 —, 生産技術センター新社, 404pp.)

端野道夫 (1976): 最尤法による対数正規分布の実用的定数推定法とその応用例, 第 20 回水理講演会論文集, pp. 29-34.

Hazen, A. (1914): Storage to Be Provided in Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply, Trans. ASCE, Vol. 77, pp. 1539-1669.

Hazen, A. (1930): Flood Flows—A Study of Frequencies and Magnitudes, JOHN WEILEY & SONS, New York, 199pp.

星 清 (1986): ガンマ分布型への Sextile 法の適用, 土木学会第 41 回年次学術講演会講演概要第 2 部, II-45, pp. 89-90.

Hoshi, K. and U. Leeyavanija (1986): A New Approach to Parameter Estimations of Gamma-Type Distributions, Journal of Hydrosience and Hydraulic Engineering, JSCE, Vol. 4, No. 2, pp. 79-95.

Hoshi, K., J.R. Stedinger and S.J. Burges (1984): Estimation of Log-Normal Quantiles — Monte Carlo Results and First-Order Approximations, Journal of Hydrology, Vol. 71, pp. 1-30.

Hosking, J.R.M., J.R. Wallis and E.F. Wood (1985): Estimation of the Generalized Extreme-Value Distribution by the Method of Probability-Weighted Moments, Technometrics, Vol. 27, No. 3, pp. 251-261.

石原藤次郎・高瀬信忠 (1957): 対数正規分布とその積率による解法, 土木学会論文集, 第 47 号, pp. 18-23.

岩井重久 (1947): 水文学における非対称分布に就て, 土木学会論文集, 第 1, 2 号合併号, pp. 93-116.

岩井重久 (1949a): Slade 型分布の非対称性の吟味及びその 2, 3 の解法, 土木学会論文集, 第 4 号, pp. 84-104.

岩井重久 (1949b): 確率洪水推定法とその本邦河川への適用, 統計数理研究, 第 2 巻, 第 3 号, pp. 21-36.

Jain, D. and V.P. Singh (1987): Estimating Parameters of EV1 Distribution for Flood Frequency Analysis, Water Resources Bulletin, Vol. 23, No. 1, pp. 59-71.

Jenkinson, A.F. (1955): The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 81, pp. 158-171.

Jenkinson, A.F. (1969): Statistics of Extremes, Technical Note 98, World Meteorological Office, Geneva.

Jowitt, P.W. (1979): The Extreme-Value Type-1 Distribution and the Principle of Maximum Entropy, Journal of Hydrology, Vol. 42, pp. 23-38.

角屋 睦 (1956): 極値分布とその一解法, 農業土木研究, 第 23 巻, 第 6 号, pp. 350-357.

角屋 睦 (1962): 対数正規分布の適用範囲, 定数について, 農業土木研究, 別冊第 3 号, pp. 12-16.

角屋 睦 (1964): 水文統計論, 水工学シリーズ, 土木学会水理委員会, 64-02, 59pp.

神田 徹・藤田睦博 (1982): 水文学 — 確率論的手法とその応用 —, 技報堂出版, 275pp.

Kirby, W. (1974): Algebraic Boundedness of Sample Statistics, Water Resources Research, Vol. 10, No. 2, pp. 220-222.

- Kite, G.W. (1977):** Frequency and Risk Analyses in Hydrology, Water Resources Pub., Fort Collins, U.S.A., 224pp.
- Landwehr, J.M., N.C. Matalas and J.R. Wallis (1979):** Probability Weighted Moments Compared With Some Traditional Techniques in Estimating Gumbel Parameters and Quantiles, Water Resources Research, Vol. 15, No. 5, pp. 1055-1064.
- Lettenmaier, D.P. and S.J. Burges (1982):** Gumbel's Extreme Value I Distribution—A New Look, Proc. ASCE, Vol. 108, No. HY4, pp.502-514.
- Lowery, M.D. and J.E. Nash (1970):** A Comparison of Methods of Fitting the Double Exponential Distribution, Journal of Hydrology, Vol. 10, pp. 259-275.
- Phien, H.N. (1986):** Sampling Properties of the Maximum Entropy Estimators for the Extreme-Value Type-1 Distribution, Journal of Hydrology, Vol. 86, pp. 391-398.
- Phien, H.N. (1987):** A Review of Methods of Parameter Estimation for the Extreme Value Type-1 Distribution, Journal of Hydrology, Vol. 90, pp. 251-268.
- Prescott, P. and A.T. Walden (1980):** Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of the Generalized Extreme-Value Distribution, Biometrika, Vol. 63, No. 3, pp. 723-724.
- Prescott, P. and A.T. Walden (1983):** Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of the Three-Parameter Generalized Extreme-Value Distribution from Censored Samples, J. Statist. Comput. Simul., Vol. 16, pp. 241-250.
- Raynal, J.A. and J.D. Salas (1986):** Estimation Procedures for the Type-1 Extreme Value Distribution, Journal of Hydrology, Vol. 87, pp. 315-336.
- Sangal, B.P. and A.K. Biswas (1970):** The 3-Parameter Lognormal Distribution and Its Applications in Hydrology, Water Resources Research, Vol. 6, No. 2, pp. 505-515.
- Slade, J.J. (1936):** An Asymmetric Probability Function, Trans. ASCE, Vol. 62.
- Sonuga, J.O. (1972):** Principle of Maximum Entropy in Hydrologic Frequency Analysis, Journal of Hydrology, Vol. 17, pp. 177-191.
- 寒川典昭 (1988):** 最大エントロピー法を用いた水文量の頻度分析手法に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 176pp.
- 寒川典昭・荒木正夫・佐藤健次 (1986):** 多変数最大エントロピー分布とその基礎特性に関する研究, 土木学会論文集, 第 375 号 /II-6, pp. 89-98.
- Stedinger, J.R. (1980):** Fitting Log Normal Distributions to Hydrologic Data, Water Resources Research, Vol. 16, No. 3, pp.481-490.
- 宝 馨・高棹琢馬・清水 章 (1989):** 極値分布の母数推定法の比較評価, 京都大学防災研究所年報, 第 32 号 B-2, pp. 455-469.
- 高棹琢馬・池淵周一 (1969):** 長期間流出機構の情報理論的研究, 京都大学防災研究所年報, 第 12 号 B, pp. 273-293.
- 高棹琢馬・池淵周一 (1975):** 降水観測がもたらす情報量とその観測網配置計画への応用, 土木学会論文報告集, 第 234 号, pp. 83-95.
- 高棹琢馬・池淵周一 (1980):** エントロピー的にみた降雨・流出変換特性とそのモデル化, 京都大学防災研究所年報, 第 23 号 B-2, pp. 193-209.
- 高瀬信忠 (1957):** 対数正規分布に関する順序統計学的考察, 土木学会論文集, 第 47 号, pp.24-29.

- 竹内邦良・土屋一仁・伊達結城 (1987): Sextile 法と PWM 法による三母数対数正規分布の母数推定, 第 14 回土木学会関東支部年次研究発表会講演概要集, pp. 60-61.
- 竹内邦良・土屋一仁 (1988a): 正規分布, 対数正規分布およびピアソン III 型分布の PWM 解, 土木学会論文集, 第 393 号 /II-9, pp. 95-101.
- 竹内邦良・土屋一仁 (1988b): 正規分布および対数正規分布の PWM 解の性能について, 土木学会論文集, 第 393 号 /II-9, pp. 103-112.
- Wallis, J.R., N.C. Matalas and J.R. Slack (1974): Just a Moment!, Water Resources Research, Vol. 10, No. 2, pp. 211-219.

第 3 章

水文頻度解析モデルの評価

対象とする水文量がどのような確率分布に従うのか、あるいは、所与の 1 組の水文データに対してどのような確率分布モデルが適当か、といった問題が水文統計の一つの大きな課題であるが、必ずしも満足すべき解答は得られていない現状である。本章では、降水量および河川流量の年最大値の標本（データ数は 59 ～ 92）を対象として、標本内の各データがそれぞれ同一の母集団から得られたものであり、かつ、互いに独立であると仮定できる（仮定せざるを得ない）状況下で、適切な確率分布モデルを選択する手順を提案する。特に、水工計画上重要な確率水文量の変動性（推定誤差）に着目している点でこれまでのこの種の研究にない知見を得ている（宝ら（1987）、宝・高棹（1988）、Takara and Takasao（1988））。

3.1 従来のモデル評価の手順とその問題点

当該水文量の 1 組のデータが与えられたとき、その水文量が従う確率分布モデルを決定するには、大略以下の手順を踏むのが通例である。

Step 1) [データの吟味] データの等質性・独立性などに関して、水文学的あるいは確率統計学的観点から検討する。

Step 2) [候補モデルの列挙] ヒストグラムや分布曲線を描き大体の分布形状を把握したのち、適当と思われる確率分布モデルをいくつか選ぶ。

Step 3) [母数推定] データにそれらのモデルをあてはめる。この際、何らかの方法で母数を推定する。

Step 4) [モデル評価] モデルの良否を何らかの規準により比較検討し、最も良いと思われるモデルを選ぶ。

これら一連の手順は必ずしも確立されたものではなく、種々の解決すべき問題を残しているが、本論文では次のような取扱いをする。まず、極値水文量を対象としているので、Step 1 のデータの等質性・独立性は満足しているものと仮定する。Step 2 の候補モデルとしては、

- 正規分布 (2 母数)
- 対数正規分布 (2 母数, 3 母数)
- PearsonIII 型分布 (2 母数, 3 母数)
- 対数 PearsonIII 型分布 (3 母数)
- 平方根指数型最大値分布 (2 母数)
- 一般化極値 (GEV) 分布 (3 母数)
- Gumbel 分布 (2 母数)
- 対数 Gumbel 分布 (2 母数, 3 母数)

の 11 種を挙げる。このように多数の分布を取り扱うことの意味は、予め特定の分布を想定しないという立場から、なるべく多数の分布モデルを候補とするということにすぎない。対象とする水文量の発生過程に基づく stochastic な解析からその水文量に適切な何らかの分布が特定できるのであれば、迷うことなくそれを用いばよい。

上記の 11 種のモデルのうち、2 母数の正規分布、対数正規分布、Gumbel 分布、対数 Gumbel 分布の式形については 1.6.1 で、3 母数対数正規分布については 2.2.1、GEV 分布については 2.4.1 において既に述べた。3 母数対数 Gumbel 分布は、変量 X の下限境界値 x_0 を三つ目の母数として、変換変量 $Y = \log(X - x_0)$ が Gumbel 分布に従うものとする。

その他の確率分布モデルについて簡単に触れておこう。

PearsonIII 型分布¹の確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{\alpha \Gamma(\beta)} \left(\frac{x - \gamma}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left(-\frac{x - \gamma}{\alpha} \right) \quad (3.1)$$

ここに、 α, β, γ は母数であり、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。2 母数の場合は、 $\gamma = 0$ とする。この分布は、 $\beta = 1$ のとき、1.6.1 で述べた指数分布となる。

対数 PearsonIII 型分布の確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{\alpha x \Gamma(\beta)} \left(\frac{\ln x - \gamma}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left(-\frac{\ln x - \gamma}{\alpha} \right) \quad (3.2)$$

この分布は、1967 年にアメリカの連邦水資源審議会 (U. S. Federal Water Resources Council) によって、合衆国の洪水頻度解析の標準モデルとして推奨されたものである。

平方根指数型最大値分布は、江藤が一雨総雨量の年最大値の確率分布として提案したもので、その分布関数は次式で与えられる (江藤ら (1986))。

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ \exp[-\lambda(1 + \sqrt{\beta x}) \exp(-\sqrt{\beta x})] & (x \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3.3)$$

この分布は、Gumbel 分布よりも右に長く尾を引く分布であり、飛び離れて大きなデータを含む標本に対して有用であろうと思われるが、提案されてまだ日が浅く十分な検証を経ていない。

次に、Step 3 の母数推定については、前章での検討の結果、分布により、また、同じ分布でも標本の大きさ (データ数) N により、良い母数推定値を与える推定法が異なることがわかった。しかしながら、最尤法は、どのような分布形に対しても実行でき、標本数が極端に少ない場合を除いて、比較的良好な結果を得る。したがって、ここではすべての分布に対して最尤法を用いることにする。ほぼ 30 年も前のことになるが、Gumbel は、“最尤法は極値分布の場合非常に複雑であり、日常業務には好ましくないほど余計な数字の仕事を必要とする”と述べている (Gumbel (1958))。しかしながら、コンピュータの発達した今日、最尤法は容易に実現できるようになった。尤度関数の最大化問題は、コンピュータ上で基本的な最適化プログラムをコールすることにより瞬時に解くことができるのである。

問題は、上記の Step 4 である。従来はデータとモデルの適合度をモデルの評価規準としてきた。たとえば、確率紙上にプロットしたデータが直線上に並んでいるかどうか、あるいは、データのヒストグラムと確率密度関数がどの程度一致しているか、目視による一貫性 (visual consistency) で判断する方法や、データと分布との適合度を数値化する方法、 χ^2 検定や Kolmogorov-Smirnov 検定のような適合度検定手法などがある。このように、適合度によりモデルを評価しようとする場合、適合度の優れたモデルがただ一つだけ定まればよい。ところが、当該水文量に対して同程度の適合度を示すモデルが複数個存在し、それらが異なる確率水文量を与えることがある。また、規準ごとに最良とみなされるモデルが異なることがある。こうした場合、どのモデルを最終的に採用すればよいのかについて、明確な提示がなされてこなかった。すなわち、適合度はモデル評価の規準としては不十分であり、何らかの新たな規準が必要である。

本章での主眼はまさにこの点にあり、適合度評価に加えて、確率水文量の変動性をモデル評価の規準とすることを提案する。ここで、筆者が強調したいのは、データの蓄積が進んでも確率水文量が大きく変動しないような確率分布モデルを選択するのが実用上望ましいということである。なぜならば、データの蓄積により確率水文量が大きく変動すると、その都度水工計画の大幅な見直しを要請されることになるからである。したがって、“データに対する適合度が良く、かつ、確率水文量の変動が小さいモデルが実用上望ましい”という観点から、モデル評価の手順を考えることにする。

¹ ガンマ (gamma) 分布とも呼ばれる。

上述の Step 4 におけるモデル評価の規準として、適合度と確率水文学の変動性を考慮し、これらによる 2 段階評価によってモデル選択を行う次のような手順を提案する。

Step 1) [データの吟味] 前述。データの等質性・独立性を仮定する。

Step 2) [候補モデルの列挙] 上の 11 種の分布モデルをすべて候補とする。

Step 3) [母数推定] 前述。すべての分布に対して最尤法を用いる。

Step 4) [候補モデルの screening] 客観的な適合度評価指標を用いて、適合度の悪いモデルを候補モデルから除外する。

Step 5) [確率水文学の変動性の検討] Step 4 で残ったモデルについて、リサンプリング手法 (後述) を用いて確率水文学の変動性を調べる。

Step 6) [最終モデルの決定] 確率水文学の変動が最も小さいモデルを選択する。

次節 3.2 では Step 3 と Step 4 について、3.3 では Step 5 と Step 6 について詳述する。

3.2 適合度の評価

データにあてはめた分布モデルの適合度を評価する方法は、目視によるものと適合度の数値化によるものがある。以下に、この二つの方法の概略を示す。

3.2.1 目視による適合度評価

あてはめた分布モデルの適合度を視覚的に評価する方法として、確率紙を用いる方法とヒストグラムに確率密度関数を描く方法の二つがある。前者は、データを確率紙上にプロットして直線上に並んでいるかどうかを目視で判断して、適合度の良否を見る方法である。ところが、確率紙は分布モデルごとに異なるので、複数個のモデルの適合度を比較するのは容易ではない。また、3 母数の分布モデルの確率紙の作成は多少煩雑である。後者は複数個のモデルを 1 枚の図面上に描くことができるので、モデルのあてはまり具合がよくわかる。この二つの方法は簡便でよく用いられている。特に、確率紙は適合度を評価するだけでなく、平分線 (fair curve) からモデルの母数を推定することができる。

大阪の年最大日降水量のデータ (1889–1980 年の 92 年間; 神田・藤田 (1982)) に対して、ヒストグラムと最尤法であてはめた分布モデルの確率密度関数を描いたものが図 3.1 である。ピーク付近で良く適合しているように見える分布モデルは、3 母数対数正規分布、3 母数対数 PearsonIII 型分布、平方根指数型最大値分布 (SQRT-ET-max と記した) であるが、目視からだけではこの三つのモデルの優劣を判断するのは難しい。また、水工計画立案上この場合問題となる非超過確率の大きい部分 (分布の右裾付近) の適合度についても同じく優劣をつけがたい。

3.2.2 適合度評価の客観的規準

適合度を定量的に評価してモデルの優劣を客観的に比較するのに、次の 4 種の評価規準が有用である。

a) 標準最小二乗規準 (SLSC)

これは、筆者らの提案したもので (高棹・宝・清水 (1986)), 既に 2.5.3 で述べた。再記すると、

$$SLSC = \frac{\sqrt{\xi_{\min}^2}}{|s_{1-p} - s_p|} \quad (3.4)$$

ここに、 s_p, s_{1-p} は非超過確率が $p, 1-p$ に対応する標準変量 (standardized or reduced variate) であり、通常は $p = 0.01$ とする。 ξ^2 は、 i 番目 ($i = 1, 2, \dots, N$) の順序統計量 x_i に対応するあてはめた分布の標準変量 s_i と、適当に定められる確率 p_i に対応する標準変量 s_i^* との差の二乗平均で

$$\xi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s_i - s_i^*)^2 \quad (3.5)$$

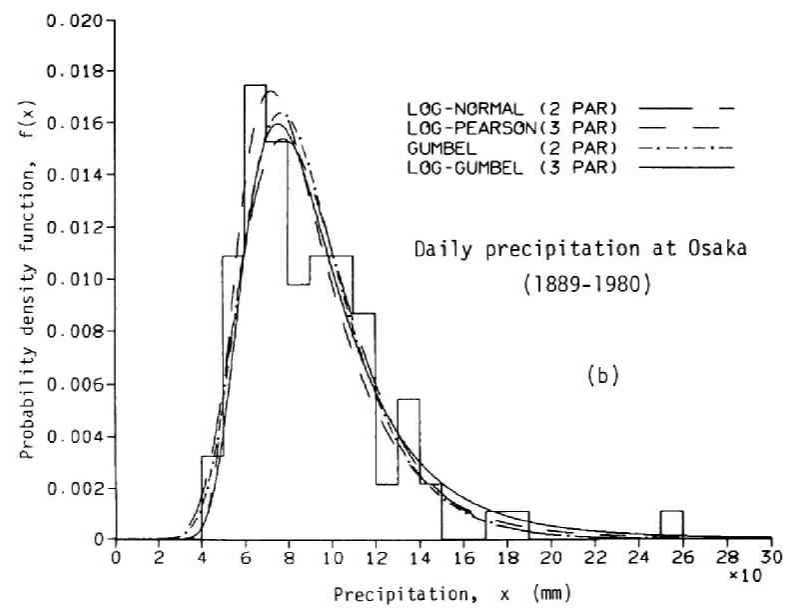
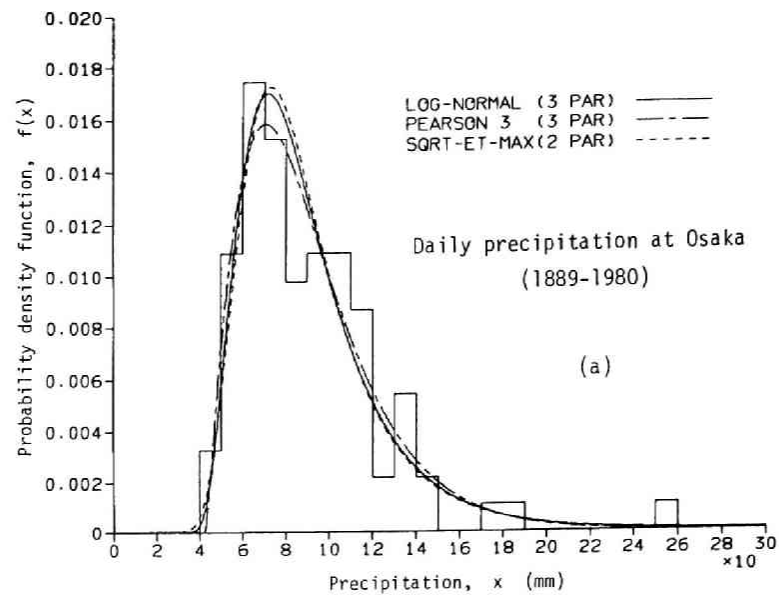


図 3.1: 大阪の年最大日降水量 (1889-1980) に最尤法であてはめた分布

である。確率 p_i は、プロットイング・ポジション公式で与える。前章での考察により、プロットイング・ポジション公式としては Hazen 公式が優れていると思われるので、 $p_i = (i - 0.5)/N$ で与える。 ξ_{\min}^2 は、(3.5) 式を最小化したときの値、すなわち、Hazen 公式を用いた最小二乗法を実行したときの分布とデータの差の二乗和であり、適合度の指標となる。分布によって標準変量のとり得る値が異なるので、異なる分布相互の比較のために ξ_{\min}^2 を標準化したものが SLSC である。

SLSC の値が小さいほど良く適合していることになる。また、1.7 で述べたように、SLSC は、異なる確率分布モデルの適合度を比較する相対的な規準であるだけでなく、適合度の絶対的な規準でもある。すなわち、SLSC ≈ 0.02 であれば良い適合度を示す。SLSC > 0.03 であれば他の分布を試みるべきである。すなわち、確率紙にデータをプロットしたり、データのヒストグラムと確率密度関数を描いたりすることなく、その値を計算するだけで適合度の良否の判定ができるという利点をもつ。

最小二乗法でなく最尤法であてはめを行った場合には、順序統計量 x_i を母数の最尤推定値 $\hat{\theta}$ を用いて変換した標準変量 s_i から (3.5) 式によって ξ^2 を求め、この ξ^2 を (3.4) 式に代入して SLSC を求める。

b) 最大対数尤度 (MLL)

最尤法によって確率分布モデルのあてはめを行った場合には尤度の大きさ自身が適合度の良否を表す指標となる。 N 個の資料 x_1, x_2, \dots, x_N が与えられたとき、尤度関数 $L(\theta)$ の対数をとった対数尤度 $\ln L(\theta)$ を最大化した最大対数尤度 (maximum log-likelihood, MLL) は次のようになる。

$$\text{MLL} = \ln L(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^N \ln f(x_i; \hat{\theta}) \quad (3.6)$$

ここに、 $f(x; \theta)$ は確率密度関数であり、 $\hat{\theta}$ は母数ベクトルの最尤推定値である。同じデータに対して、異なる確率分布をあてはめたとき、MLL の値の大きいモデルが適合度が良いということになる。

さて、対象とする変量の真の分布がわかっているとき、その真の分布を近似するモデルの良否を比較する規準として Kullback-Leibler 情報量と呼ばれるものがある。一般には真の分布は未知であり、その場合には、対数尤度を Kullback-Leibler 情報量の代用とできる (坂元ら (1983))。MLL は、単に対数尤度を最大化したものというだけでなく、情報理論の立場からみた評価規準の一つであり、異なる確率分布モデルの適合度を比較する相対的な評価の規準として有用である。

c) 情報量規準 (AIC)

一般に、母数の個数が多い確率分布モデルの方が適合度は良くなることに留意しなければならない。すなわち、母数の個数が増えると、SLSC は小さくなっていくし、MLL は大きくなっていく。したがって、SLSC や MLL などを評価規準に用いると、母数の個数の多いモデルが“良いモデル”であると評価されることになる。また、分布モデルの母数が多くなると、式形が複雑になるだけでなく、母数推定値や確率水文量を求めることが複雑になる。すなわち、モデル評価においては、モデルの簡潔さも適合度と同じく基本的な要件である。Akaike (1974) は、適合度だけでなく母数の個数をも併せて評価できる情報量規準 (Akaike's information criterion, AIC) を提案した。

$$\text{AIC} = -2\text{MLL} + 2N_p \quad (3.7)$$

ここに、MLL は最大対数尤度であり、 N_p は母数の個数である。母数が増えると、(3.7) 式の第 2 項は大きくなるが、適合度は良くなるので第 1 項は小さくなる。このトレードオフ関係の中で AIC を最小とするようなモデルが最も“良い”モデルである、とするのが赤池の考え方である。AIC も前述の情報理論的考え方から導かれたものであり、その誘導過程や応用例は坂元ら (1983) の成書に詳しい。水文流出系への応用としては、時系列モデルの最適次数の決定 (Hipel et al. (1977)) や流出モデルの評価 (高埴ら (1984)) などがある。

d) 相関係数 (COR)

順序統計量 x_i に対する非超過確率 p_i をプロットイング・ポジション公式で与える。これに対応する標準変量 s_i^* と、 x_i の変換変量 $y_i = h(x_i)$ との相関係数 R_{ys} は適合度を評価する規準となる。

$$\text{COR} = R_{ys} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})(s_i^* - \bar{s}^*)}{[\{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2\} \cdot \{\sum_{i=1}^N (s_i^* - \bar{s}^*)^2\}]^{1/2}} \quad (3.8)$$

表 3.1: 大阪の年最大日降水量 (1889-1980) に最尤法であてはめた分布の適合度の比較

Prob. distribution		SLSC	MLL	AIC	COR
Normal	(2p)	0.07937	-450.151	904.301	0.93115
Log-normal	(3p)	0.01666①	-432.818①	871.636②	0.99699①
Log-normal	(2p)	0.02996	-434.914	873.828	0.99021
Pearson III	(3p)	0.03765	-432.902②	871.803③	0.98645
Pearson III	(2p)	0.06116	-438.172	880.344	0.96845
Log-Pearson III	(3p)	0.01749②	-432.910③	871.819	0.99668②
SQRT-ET-max	(2p)	0.02423	-433.091	870.182①	0.99322
G.E.V.	(3p)	0.02124	-433.167	872.335	0.99435
Gumbel	(2p)	0.04769	-434.414	872.829	0.98457
Log-Gumbel	(3p)	0.01858③	-433.167	872.335	0.99596③
Log-Gumbel	(2p)	0.03496	-434.531	873.062	0.98953

① denotes the best distribution for each criterion;

② and ③ the second and the third, respectively.

ここに、 \bar{y}, \bar{s}^* は y_i, s_i^* の平均である。COR が 1 に近いほど適合度が良いと言える。相関係数によって適合度を比較する方法は、波浪解析でよく用いられるようである (合田 (1988, 1989))。

ここで、筆者らが提案した適合度規準 SLSC と相関係数 COR とを比較してみよう (宝・高棹 (1989))。表 3.1 は、大阪の年最大日降水量の場合について、4 種の評価規準を示したものである。表の中の丸付き数字は評価規準ごとの適合度の良いモデルの順位 (ベスト 3) である。SLSC と COR の第 1, 2, 3 位の分布モデルが同じであることから²、両者は似たような評価を与える (評価規準として同等の性能をもつ) ことが推測される。図 3.2 は、後述する 10 種の極値降水量の資料 および 2 種の極値流量の資料に前記の 11 種の確率分布モデルをあてはめて得られた SLSC と COR をプロットしたものである。SLSC と COR はだいたい一意的な関係にあることがわかる。この図から、十分な適合度と判断される基準値 $SLSC \approx 0.02$ に対応するのは $COR \approx 0.995$ であり、 $SLSC < 0.03$ に対応するのは $COR > 0.990$ であると言える。分布によっては、SLSC を求めるのが煩雑な場合がある。一方、相関係数はどの分布についても比較的簡便に求められるので SLSC の代用とすることができる。上記の値が満足すべき適合度の判定基準となろう。

3.2.3 適合度のみによる評価の問題点

大阪のデータについて、これらの評価規準の値を求めた表 3.1 をいまいし詳しく見てみよう。この表によれば、すべての評価規準で順位が良いものは 3 母数対数正規分布であり、AIC のみが第 2 位、SLSC, MLL, COR は第 1 位である。その他の 3 母数の分布 (Pearson III 型, 対数 Pearson III 型, 対数 Gumbel, GEV) はどれかの規準でベスト 4 に入っている。2 母数の分布では、平方根指数型最大値分布は AIC が第 1 位で、MLL は第 4 位、SLSC, COR は第 5 位である。このとき $SLSC = 0.02423$ でまずまずと言える。他の 2 母数の分布モデルはどれもベスト 5 にも入らず、適合度が相対的に良くない。表 3.1 や 後述の他のデータに対する同様の適合度の表を見てわかるように良い評価を得るモデルが規準ごとに異なる。

つまり、モデルの良否を適合度のみによって評価するのは非常に難しいと言える。適合度は、“良いモデル” のための必要条件であり、モデル群を screening する (適合度の悪いモデルをふるい落とす) 規準として有用である。図 3.1 や 表 3.1 に示したように同程度に良い適合度を示すモデルが二つ以上存在する場合には、適合度以外の別の評価規準が必要となるわけである。

3.3 確率水文量の変動性を規準としたモデル評価の手順

年最大値などの極値水文量を取り扱う場合、データと分布全体の適合度も重要であるが、分布の裾の部分の形状や適合度がより重視される。というのは、分布の裾、すなわち非超過確率の大きい部分 (渇水などの場合のように小

² 常に同じであるとは限らない。

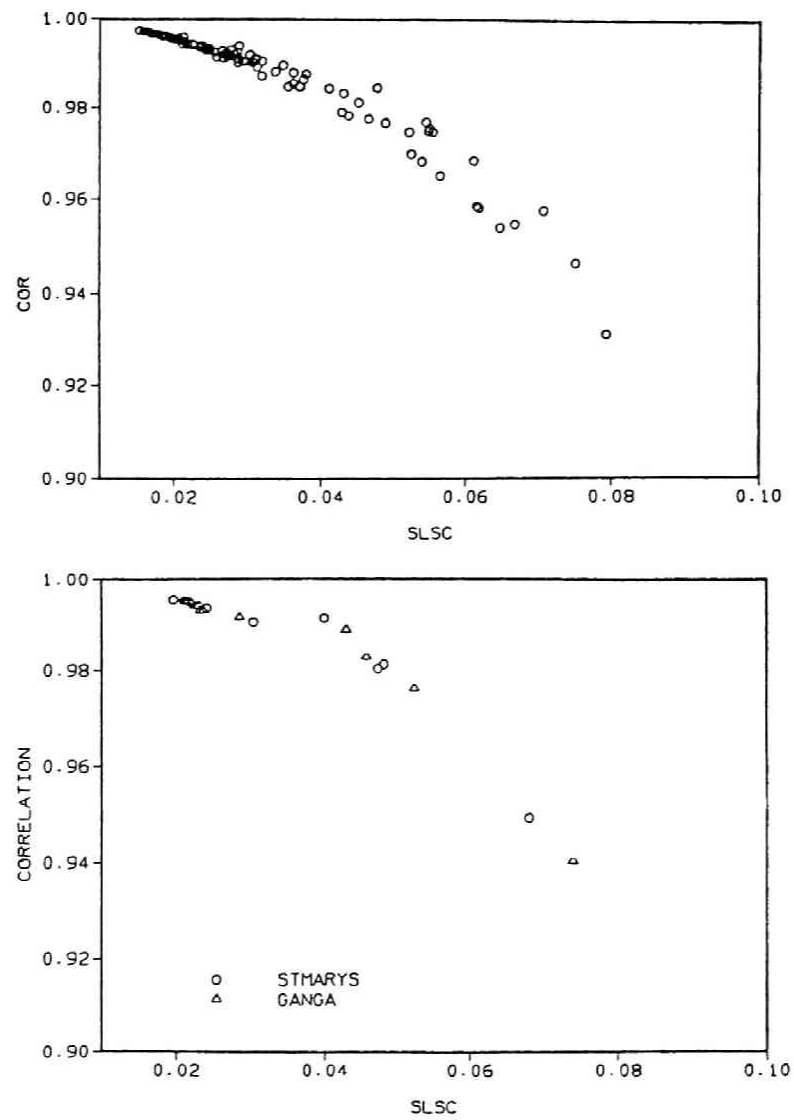


図 3.2: SLSC と 相関係数 (COR) の関係 [上段: 降水量データ; 下段: 流量データ]

さな値を対象とするときは、超過確率の大きい部分)のちょっとした形状の違いによって確率水文学の値がかなり異なってくるからであり、実際の種々の水工計画の立案はこの確率水文学の値を基礎としてなされるからである。

したがって、データの蓄積が進んでも(言い換えると、データの組合せが異なっても)確率水文学の推定値が大きく変動しないような確率分布モデルが実用上望ましい。こうした考え方に立って、確率水文学の変動性をモデル評価の規準としてはどうか、というのが筆者の提案である。

確率水文学の変動性(推定精度)を調べるために、二つのリサンプリング手法—jackknife 法と bootstrap 法—を適用する。リサンプリング手法とは、簡単にいうと、現在手元にある 1 組のデータセット(標本)から、部分的にデータを抽出したり、繰返しを許して元の標本と同じデータ個数だけ抽出したりという操作を反復して多数のデータセットを作り出し、元の標本から得られる統計量の偏倚を補正したり、統計量の推定誤差を求めたりする手法である。こうして生成される多数のデータセットの統計処理は、近年コンピュータの発達とともに急速に進展しつつあり、CIS (computer intensive statistics) という統計学の一分野を形成している。

3.3.1 jackknife 法と bootstrap 法の概説

Quenouille は統計量の偏倚を推定・補正するためのノンパラメトリックな方法を 1949 年に発表した³⁾が、その後(1958 年)、その方法は偏倚だけでなく分散(すなわち統計量に含まれる誤差の程度)をも推定し得ることが Tukey によって指摘され jackknife 法と名づけられた。“jackknife”とは、Efron (1979)によれば、“はば広いいろいろな状況の中で有用な大雑把な道具”といった意味あいにつけられたものである。Miller (1974)によって jackknife 法に関する詳細なレビューがなされている。

bootstrap 法は、Efron が 1979 年に発表した方法で、jackknife 法と同様、統計量に含まれる誤差の程度を推定するものである。ただし、jackknife 法よりも多数回の繰返し計算を必要とする。“bootstrap”という名前は、そのアルゴリズムの中で元の標本自身が新たな標本をいくつも作り出して誤差推定を行うという自助的性質(self-help nature)があるところからつけられた(Efron (1979))³⁾。

水文学の分野でのこれらの手法の適用例としては以下のようなものがある。Bardsley (1977)は、極値データに対して、三つの極値分布のうちどれを選ぶかという問題に jackknife 法を適用している。Tung and Mays (1981)は、流量資料の少ない地点において洪水頻度分析を行う際に、対数 PearsonIII 型分布で用いる頻度係数を、標本歪と Water Resources Council が作成した歪マップ(skew map)による歪の分散から推定する問題に jackknife 法と bootstrap 法を適用している。データ数の多寡にかかわらず、また、マップの精度にかかわらず、jackknife 法が頻度係数を精度良く推定し得ることを示している。Cover and Unny (1986)は、年流量時系列に ARMA モデルをあてはめ、パラメタ推定誤差をこれらのリサンプリング手法を用いて議論している。

わが国においては、水文学関係の分野で jackknife 法や bootstrap 法を用いたものは見あたらないが、一般のデータ解析の分野で徐々に用いられ始めているようである(奥村(1986))。

以下に、これら二つの方法の概略を示す。 N 個のデータ x_1, x_2, \dots, x_N を用いて、その母集団の特性を表わす量を推定する構造(統計量)を $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ と記すことにする。

a) jackknife 法

- i) N 個のデータすべてを用いて統計量を求め、それを

$$\hat{\psi} = \psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3.9)$$

と記す。

- ii) i 番目のデータを除いた $N - 1$ 個のデータを用いて統計量を求めそれを次のように記す。

$$\hat{\psi}_{(i)} = \psi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \quad (3.10)$$

$\psi_{(i)}$ は全部で N 個 ($i = 1, 2, \dots, N$) 求められる。

- iii) 次式により $\hat{\psi}_{(i)}$ の平均 $\hat{\psi}_{(\bullet)}$ を求める。

$$\hat{\psi}_{(\bullet)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_{(i)} \quad (3.11)$$

³⁾ “他人の助けを借りないで自分でやる”ことを英語では pull oneself up by one's own bootstraps という。

iv) Quenouille の偏り推定値は次式で与えられる。

$$\hat{B}ias = (N-1)(\hat{\psi}_{(\bullet)} - \hat{\psi}) \quad (3.12)$$

結局、偏りを補正した jackknife 推定値 $\hat{\psi}_J$ は、

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_J &= \hat{\psi} - \hat{B}ias \\ &= N\hat{\psi} - (N-1)\hat{\psi}_{(\bullet)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

統計量 ψ の分散の jackknife 推定値 \hat{s}_J^2 は、

$$\hat{s}_J^2 = \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^N N(\hat{\psi}_{(i)} - \hat{\psi})^2 \quad (3.14)$$

によりそれぞれ求められる。なお、 $\hat{\psi}_J$ は N^{-2} のオーダーの偏りをもつことが知られている (Efron (1982))。

b) bootstrap 法

i) N 個のデータ x_1, x_2, \dots, x_N から繰返しを許して N 個取り出し、それを $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*$ と記す。この 1 組の標本を bootstrap 標本という。bootstrap 標本を用いて統計量を求め、それを次のように記す。

$$\psi^* = \psi(x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) \quad (3.15)$$

ii) i) の操作を独立に多数回 (B 回) 繰り返す。すなわち、全部で B 個の bootstrap 標本それぞれに対して、 ψ^* を求める。第 b 番目の bootstrap 標本に対して得られた統計量を便宜上 ψ^{*b} と記す ($b = 1, 2, \dots, B$)。

iii) 次式により ψ^{*b} の平均 ψ^{**} を求める。

$$\psi^{**} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \psi^{*b} \quad (3.16)$$

これは統計量 ψ の bootstrap 推定値である。

iv) 統計量 ψ の分散の bootstrap 推定値 \hat{s}_B^2 を

$$\hat{s}_B^2 = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\psi^{*b} - \psi^{**})^2 \quad (3.17)$$

により求める。

3.3.2 モデル評価へのリサンプリング手法の適用

データに確率分布モデルをあてはめたとき、 T 年確率水文量 (再現確率統計量あるいは分位値) の推定誤差を求めることは一般に容易ではない。しかしながら、jackknife 法や bootstrap 法を適用することにより比較的容易にそれが実現できる。すなわち、前述の統計量 ψ に確率水文量をとればよい。適合度評価で screening されて残った複数個の確率分布モデルそれぞれについて、(3.9), (3.10) 式、あるいは (3.15) 式において最尤法によりあてはめ (母数推定) を行い T 年確率水文量を求めるのである。こうして、想定した分布に対して (3.14), (3.17) 式が確率水文量の変動の大きさを与えることになる。この作業が、3.1 で提案した Step 5 の内容である。

また、確率分布モデルごとに、(3.14) または (3.17) 式で得られた \hat{s}_J, \hat{s}_B の値を比較して、その値が最も小さい確率分布モデルを選択するのが、3.1 の Step 6 である。

3.4 降水量の極値データへの適用

3.4.1 大阪の年最大日降水量の場合

表 3.1 で見たように、大阪の年最大日降水量に確率分布モデルをあてはめたところ、ある程度良い適合度を示す分布が複数個あった。そこで、SLSC, MLL, AIC, COR のどれかの適合度規準について 1 度でも 4 位以内⁴にランクされたモデルに対してリサンプリング手法を適用する。表 3.1 によれば、そのようなモデルは、3 母数対数正規分布、3 母数 PearsonIII 型分布、対数 PearsonIII 型分布、平方根指数型最大値分布、3 母数対数 Gumbel 分布、GEV 分布である。この六つの分布に jackknife 法を適用して、50, 100, 200 年確率水文量の推定値とその推定誤差 \hat{s}_J を求めた。表 3.2 はその結果を示したものである。これより、次のようなことが言える。

⁴たとえば、3 位以内でもよいのだが、GEV 分布の挙動にも関心があるので 4 位以内とした。

表 3.2: jackknife 法によって求められた確率水文量の推定値 * と推定誤差 **

[大阪の年最大日降水量 (1889–1980)]

Prob. distribution		Return period, T (years)		
		50	100	200
SQRT-ET-max	(2p)	180.46(11.25)	203.56(13.58)	227.85(16.08)
Pearson III	(3p)	172.82(14.67)	189.34(17.34)	205.51(20.36)
Log-normal	(3p)	179.94(17.83)	201.66(23.69)	224.17(30.44)
Log-Pearson III	(3p)	181.99(19.56)	205.69(27.06)	230.87(36.13)
Log-Gumbel	(3p)	182.95(21.07)	207.62(30.35)	233.86(43.03)
G.E.V.	(3p)	183.10(21.19)	207.83(30.42)	234.15(42.13)
Gumbel	(2p)	167.19(9.13)	183.18(10.49)	199.10(11.85)
Log-normal	(2p)	165.63(11.77)	180.71(14.00)	195.70(16.31)

1. 確率水文量の推定誤差が最も小さい分布モデルは平方根指数型最大値分布であり、ここで提案した筆者の方法によれば、大阪の年最大日降水量データに対してはこの分布が最も良いモデルである。なお、平方根指数型最大値分布を除いた五つの分布モデルはすべて3母数であった。参考のため、screeningで落とされた2母数のモデル (Gumbel 分布, 対数正規分布) に jackknife 法を適用した場合どうなるか調べてみた。表 3.2 の破線の下にその結果を示す。このとき、これら二つの分布は、小さい推定誤差を示すが、確率水文量の値がそれぞれかなり小さい値となっている。この二つの分布は、表 3.1 で見たように、適合度の悪かったものである。
2. 3母数 PearsonIII 型分布の推定誤差も、他の四つの分布に比べてかなり小さい。しかし、確率水文量の推定値は、この分布の場合のみ特に小さく、たとえば 200 年確率水文量は、平方根指数型最大値分布の 100 年確率に相当する。他の5分布と比べて危険側に過ぎるようである。

図 3.3 には、平方根指数型最大値分布、3母数 PearsonIII 型分布、3母数対数正規分布について、jackknife 法を用いて母数推定値の偏倚を補正した後の確率密度関数の形状を示した。補正する前のもの (図 3.1(a)) と比べると、3母数対数正規分布と3母数 PearsonIII 型分布は、ピーク付近の形状がヒストグラムに近づいたように見える。3母数 PearsonIII 型分布は他の二つに比べて右にひずんでおり、相対的に小さな確率水文量を与えている表 3.2 の結果 (上述 2.) が確認できる。

bootstrap 法を適用する場合、生成する bootstrap 標本の個数 B をどの程度にするかという問題がある。大阪のデータ ($N = 92$) に対して、 $B = 100, 1000, 10000$ を試みた。どの場合も、jackknife 法によって得た推定誤差におおむね近い値を得た。 $B = 100$ と $B = 1000$ とを比べると若干その値に差があったが、 $B = 1000$ と $B = 10000$ とではほぼ同じであった。後に示す他の適用例でも検討したところ、100 個程度のデータに対して $B = 1000$ 程度でよさそうであるとの結論を得た。

3.4.2 琵琶湖流域の年最大 m 日降水量の場合

同じ手順を琵琶湖流域のデータに適用した結果を示す。ここでは、大津、彦根の地点降水量 (1912–1985 年の 74 年間) と琵琶湖流域平均降水量 (1912–1981 年の 70 年間) の年最大 m 日降水量 ($m = 1, 2, 3$) を対象とする。なお、bootstrap 法は jackknife 法と同様の評価結果を与えるので、jackknife 法の結果のみを示すことにする。

(1) 大津地点降水量

a) 適合度の比較

表 3.3 に、大津の年最大 m 日降水量に対する各分布モデルの適合度とその順位を示した。この表から次のようなことがわかる。

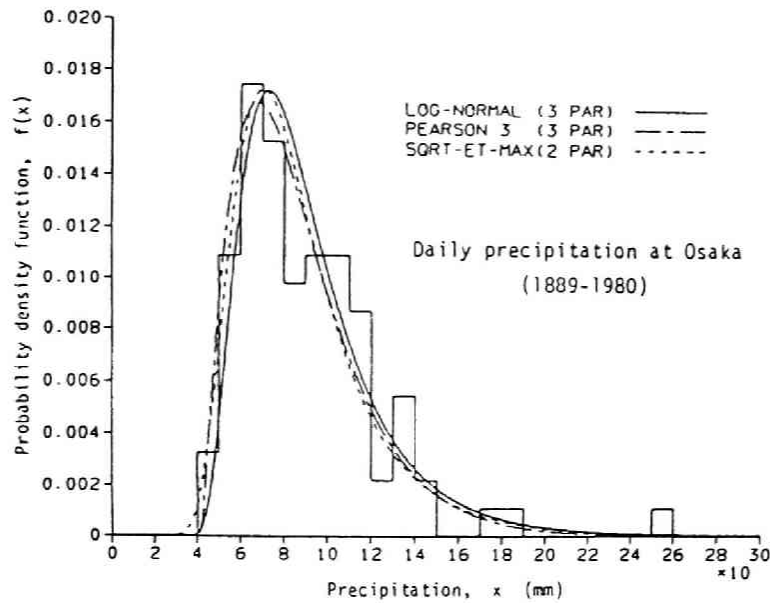


図 3.3: 大阪の年最大日降水量に対して jackknife 法で補正した分布

[$m = 1$ の場合] SLSC, MLL, AIC, COR について評価順位を見ると, 3 母数 PearsonIII 型分布はそれぞれ 2, 1, 1, 2 位, 3 母数対数正規分布は 1, 2, 4, 1 位である。この二つのモデルの SLSC は 0.02 に近く, 良く適合していると言える。平方根指数型最大値分布は AIC が 2 位であるが, SLSC 値があまり良くない (SLSC = 0.03562)。

[$m = 2, 3$ の場合] 適合する分布は $m = 2, 3$ で似たような傾向を示す。ただし, 評価規準ごとの順位はかなりばらつく。適合度が 1 位の分布モデルは, SLSC, COR で 3 母数対数正規分布, MLL で 3 母数 PearsonIII 型分布, AIC で 2 母数 PearsonIII 型分布である。GEV 分布も比較的良好 ($m = 2$ で 2, 3, 5, 2 位, $m = 3$ で 3, 3, 5, 2 位)。平方根指数型最大値分布の SLSC はかなり悪い。Gumbel 分布は, $m = 2$ のとき SLSC = 0.04289 > 0.03 で適合度が悪く, 2 日降水量のデータを Gumbel 確率紙にプロットしても直線上に乗らない。 $m = 2$ のとき, SLSC, COR で最も良いもの (3 母数対数正規分布) でも SLSC = 0.02699, COR = 0.99206 であり, このデータはここで扱った分布が比較的良好に合致しないもののようなものである。一方, $m = 3$ のときは SLSC < 0.02, COR > 0.995 となる分布が五つあり, 適合しやすいデータであると言える。なお, 3 母数対数 PearsonIII 型分布の場合, 母数推定がうまくいかないことがあった。

b) 確率水文量の変動性

表 3.4 に jackknife 法で求めた確率水文量の推定値とその推定誤差 (\hat{s}_j) を示す。

[$m = 1$ の場合] 表 3.4 の $m = 1$ の欄で破線より上の五つの分布モデルは, 表 3.3 においてどれかの適合度規準において 1 度でも 3 位以上にランクされたモデルである。この五つのモデルの中で, 確率水文量の推定誤差が最も小さいものは Gumbel 分布である。また, 破線より下の四つの分布は参考のために挙げたもので, この四つの中で, 2 母数 PearsonIII 型分布は, Gumbel 分布よりも小さい推定誤差を与えるが, 確率水文量の推定値を見ると, 特に, $T = 100, 200$ のところで他の分布と比べて極端に小さな値を与える。この 2 母数 PearsonIII 型分布は, 表 3.3 でも見たように, $m = 1$ の場合に適合度の悪かったものである。大阪の日降水量に対して良い評価を得た平方根指数型最大値分布は, 推定誤差は Gumbel 分布の次に小さいが, 相対的にかなり大きい確率水文量を与える。Gumbel 分布は, 表 3.3 から適合度が 4, 7, 3, 4 位, SLSC = 0.02666 で, 確率水文量の推定誤差が最も小さい。すなわち, $m = 1$ のとき Gumbel 分布が良いと考えられる。

[$m = 2, 3$ の場合] 2 母数 PearsonIII 型分布が, $m = 2, 3$ のどちらの場合も適合度が良く, 確率水文量の推定誤差も最も小さいので, 最良のモデルとしてよい。

表 3.3: 大津の年最大 m 日降水量 (1912–1985) に最尤法であてはめた分布の適合度の比較

m	Prob. distribution	SLSC	MLL	AIC	COR
1	Normal (2p)	0.05384	-364.832	733.663	0.96829
	Log-normal (3p)	0.02120①	-357.207②	720.415	0.99511①
	Log-normal (2p)	0.02732	-358.297	720.593	0.99186
	Pearson III (3p)	0.02395②	-356.390①	718.780①	0.99381②
	Pearson III (2p)	0.03205	-359.601	723.201	0.99050
	Log-Pearson III (3p)	0.02489③	-357.466③	720.932	0.99319③
	SQRT-ET-max (2p)	0.03562	-357.668	719.336②	0.98479
	G.E.V. (3p)	0.03203	-357.804	721.608	0.98719
	Gumbel (2p)	0.02666	-358.060	720.120③	0.99287
	Log-Gumbel (3p)	0.02881	-357.804	721.608	0.99015
	Log-Gumbel (2p)	0.04661	-359.047	722.095	0.97768
2	Normal (2p)	0.03634	-384.026	772.052	0.98557
	Log-normal (3p)	0.02699①	-382.257	770.514	0.99206①
	Log-normal (2p)	0.02882③	-382.480	768.959②	0.99094③
	Pearson III (3p)	0.03137	-381.948①	769.896	0.98917
	Pearson III (2p)	0.02941	-382.036②	768.072①	0.99056
	Log-Pearson III (3p)	---	---	---	---
	SQRT-ET-max (2p)	0.06684	-384.607	773.214	0.95468
	G.E.V. (3p)	0.02819②	-382.086③	770.171	0.99192②
	Gumbel (2p)	0.04289	-382.838	769.676③	0.97919
	Log-Gumbel (3p)	0.04360	-382.918	771.836	0.97860
	Log-Gumbel (2p)	0.07514	-389.554	783.108	0.94658
3	Normal (2p)	0.03710	-391.944	787.889	0.98497
	Log-normal (3p)	0.01732①	-389.143	784.287	0.99675①
	Log-normal (2p)	0.01994	-389.328	782.656②	0.99568
	Pearson III (3p)	0.01855②	-388.994①	783.988	0.99625
	Pearson III (2p)	0.01894	-389.106②	782.213①	0.99626②
	Log-Pearson III (3p)	---	---	---	---
	SQRT-ET-max (2p)	0.05437	-391.526	787.051	0.97694
	G.E.V. (3p)	0.01867③	-389.134③	784.268	0.99626②
	Gumbel (2p)	0.02728	-389.616	783.232③	0.99239
	Log-Gumbel (3p)	0.02857	-389.703	785.407	0.99185
	Log-Gumbel (2p)	0.07079	-396.690	797.380	0.95773

① denotes the best distribution for each criterion;

② and ③ the second and the third, respectively.

表 3.4: jackknife 法によって求められた確率水文量の推定値 * と推定誤差 **

[大津の年最大 m 日降水量 (1912-1985)]

m	Prob. distribution		Return period, T (years)		
			50	100	200
1	Gumbel	(2p)	189.84(10.73)	207.72(12.27)	225.54(13.80)
	SQRT-ET-max	(2p)	208.28(13.55)	234.44(16.29)	261.92(19.24)
	Pearson III	(3p)	190.38(15.61)	206.40(19.36)	221.95(23.28)
	Log-normal	(3p)	202.47(16.58)	224.86(22.20)	247.81(28.83)
	Log-Pearson III	(3p)	203.52(18.88)	227.17(26.72)	251.77(36.44)
	Pearson III	(2p)	182.59(10.22)	195.53(11.52)	207.87(12.80)
	Log-normal	(2p)	189.04(11.61)	205.46(13.60)	221.73(15.68)
	Log-Gumbel	(3p)	200.63(17.43)	223.06(25.21)	245.95(35.19)
	G.E.V.	(3p)	202.06(17.53)	225.19(25.35)	248.94(35.39)
	Pearson III	(3p)	243.92(11.42)	261.66(12.90)	278.59(14.38)
2	Gumbel	(2p)	264.74(12.81)	290.90(14.78)	316.96(16.76)
	G.E.V.	(3p)	236.68(12.21)	250.41(16.75)	262.36(22.08)
	Log-normal	(2p)	257.24(14.11)	280.92(16.76)	304.47(19.58)
	Log-normal	(3p)	243.76(15.59)	261.51(20.86)	278.45(26.91)
	Pearson III	(3p)	240.08(17.47)	256.44(22.40)	271.94(27.63)
	Pearson III	(2p)	269.82(14.12)	289.26(16.05)	307.81(17.96)
3	Gumbel	(2p)	282.35(14.09)	310.19(16.32)	337.94(18.56)
	Log-normal	(2p)	283.64(16.71)	309.34(19.92)	334.88(23.32)
	G.E.V.	(3p)	271.29(17.85)	290.35(23.13)	307.82(29.19)
	Log-normal	(3p)	272.74(19.35)	293.62(24.74)	313.76(30.75)
	Pearson III	(3p)	267.77(19.88)	286.44(24.75)	304.18(29.86)
	Pearson III	(2p)	282.35(14.09)	310.19(16.32)	337.94(18.56)

(2) 彦根地点降水量

a) 適合度の比較

表 3.5 に適合度を示す。 $m = 1, 2, 3$ のどの場合も評価結果は似たような傾向を示していると言える。2 母数、3 母数対数正規分布は、 $m = 1, 2, 3$ のとき $SLSC \approx 0.02$ で良く適合している。特に、AIC では m にかかわらず 2 母数対数正規分布が 1 位である。また、Gumbel 分布、平方根指数型最大値分布は、MLL がそれほど悪くなく 2 母数の分布モデルであるので、AIC ではそれぞれ 2 位、3 位に浮上している。しかし、平方根指数型最大値分布は $SLSC > 0.03$ であり適合度が悪い。2 母数 PearsonIII 型分布は、大津の場合 $m = 2, 3$ でかなり良く適合していたが、彦根の場合良くない。

b) 確率水文量の変動性

表 3.6 によれば、 $m = 1, 2, 3$ のどの場合も、確率水文量の変動が最も小さいモデルは Gumbel 分布であることがわかる。 $m = 2$ のとき 3 母数対数 Gumbel 分布は確率水文量を過小評価することになり、逆に、平方根指数型最大値分布は過大評価している。2 母数対数正規分布は、表 3.5 で見たようにデータに対する適合度はかなり良く、推定誤差も比較的小さい（適合度の良い 3 母数対数正規分布、3 母数 PearsonIII 型分布の推定誤差と比べるとかなり小さい）。Gumbel 分布と 2 母数対数正規分布を比べると、確率水文量に顕著な差は見られないが、確率水文量の推定誤差は Gumbel 分布のほうが小さい。しかし、 $m = 2$ のとき Gumbel 分布の適合度は $SLSC = 0.03089$ とあまり良くない。すなわち、適合度を重視するなら 2 母数対数正規分布を採用しても、Gumbel 分布と大差ない確率水文量を与えるので、実用上差し支えない。

(3) 琵琶湖流域平均降水量

a) 適合度の比較

表 3.7 に適合度を示す。 $SLSC \approx 0.02$ となる分布が多くあり、比較的良く適合するデータであると言え、適合度の優劣はつけにくい。 $m = 2$ のとき 3 母数 PearsonIII 型分布がどの評価規準も 1 位である。

b) 確率水文量の変動性

表 3.8 から、 $m = 1, 2, 3$ の場合、推定誤差の小さい順に Gumbel 分布、2 母数対数正規分布である。彦根の地点降水量の場合とはほぼ同様の評価結果となる。

3.4.3 まとめ

以上の結果から次のようなことが言える。

1. データに対する適合度が良く、かつ、確率水文量の変動（推定誤差）が小さいという観点から評価すると、大阪の日降水量には平方根指数型最大値分布が良く、彦根地点および琵琶湖流域平均の年最大 1, 2, 3 日降水量、大津地点の年最大日降水量については Gumbel 分布が最も良い。大津地点の年最大 2, 3 日降水量には 2 母数 PearsonIII 型分布が良い。
2. 確率水文量の変動性（推定誤差）をモデルの評価規準とすると、2 母数の分布の方が有利である。というのは、データの組合せが変わるごとに 3 母数の分布は毎回良く適合するが、良く適合する分だけ確率水文量の値が毎回相対的に大きく異なることになるからである。したがって、ここで提示した評価手順で 3 母数の分布が最終的に選ばれることはまれであると推測できる。3 母数の分布が選ばれることがあるとすれば、それは 2 母数の分布のどれを用いても良い適合度が得られない場合に限られる。さらに言えば、母数を 4 個も 5 個ももつような分布は、単峰とみなせるデータに対してはほとんど無意味である。
3. 以上の考察から、極値データに確率分布モデルをあてはめる際には、まず Gumbel 分布を試み、良い適合度が得られたら Gumbel 分布を採用すればよいと言える（このとき $SLSC \approx 0.02$ または $COR \approx 0.995$ が良い目安となろう）。Gumbel 分布の適合が不十分な場合、2 母数対数正規分布、2 母数 PearsonIII 型分布を次に試す。これら三つの分布が、 $SLSC < 0.03$ で同程度の適合度を示したら、jackknife 法を適用し、確率水文量の変動の小さいものを選ぶ。多くの場合、ここまでの手順でけりがつくものと思われる。

表 3.5: 彦根の年最大 m 日降水量 (1912-1985) に最尤法であてはめた分布の適合度の比較

m	Prob. distribution	SLSC	MLL	AIC	COR
1	Normal (2p)	0.05238	-363.597	731.193	0.96999
	Log-normal (3p)	0.01543②	-357.073②	720.146	0.99743②
	Log-normal (2p)	0.01603③	-357.171	718.343①	0.99722③
	Pearson III (3p)	0.01897	-356.890①	719.781	0.99613
	Pearson III (2p)	0.02870	-358.101	720.203	0.99255
	Log-Pearson III (3p)	0.01539①	-357.111③	720.223	0.99745①
	SQRT-ET-max (2p)	0.03630	-357.776	719.553③	0.98785
	G.E.V. (3p)	0.02019	-357.187	720.374	0.99523
	Gumbel (2p)	0.02015	-357.198	718.396②	0.99554
	Log-Gumbel (3p)	0.01967	-357.189	720.378	0.99547
	Log-Gumbel (2p)	0.05539	-361.265	726.530	0.97475
2	Normal (2p)	0.06476	-384.554	773.107	0.95411
	Log-normal (3p)	0.02071①	-376.259②	758.517	0.99534①
	Log-normal (2p)	0.02154③	-376.378	756.755①	0.99496③
	Pearson III (3p)	0.03391	-376.165①	758.330	0.98802
	Pearson III (2p)	0.04515	-377.592	759.183	0.98134
	Log-Pearson III (3p)	0.02086②	-376.285③	758.570	0.99529②
	SQRT-ET-max (2p)	0.03096	-376.968	757.937③	0.99096
	G.E.V. (3p)	0.02742	-376.432	758.864	0.99131
	Gumbel (2p)	0.03089	-376.480	756.959②	0.99005
	Log-Gumbel (3p)	0.02572	-376.432	758.864	0.99236
	Log-Gumbel (2p)	0.05479	-380.325	764.649	0.97497
3	Normal (2p)	0.06146	-390.249	784.497	0.95867
	Log-normal (3p)	0.01945①	-382.500①	771.000	0.99590①
	Log-normal (2p)	0.02047②	-382.621	769.243①	0.99545②
	Pearson III (3p)	0.03061	-382.500①	771.000	0.99033
	Pearson III (2p)	0.04119	-383.783	771.567	0.98443
	Log-Pearson III (3p)	---	---	---	---
	SQRT-ET-max (2p)	0.03139	-383.186	770.372③	0.99103
	G.E.V. (3p)	0.02493	-382.618③	771.236	0.99279
	Gumbel (2p)	0.02745	-382.653	769.307②	0.99206
	Log-Gumbel (3p)	0.02378③	-382.618③	771.236	0.99346③
	Log-Gumbel (2p)	0.05483	-386.646	777.291	0.97564

① denotes the best distribution for each criterion ;

② and ③ the second and the third, respectively.

表 3.6: jackknife 法によって求められた確率水文量の推定値 * と推定誤差 **

[彦根の年最大 m 日降水量 (1912-1985)]

m	Prob. distribution		Return period, T (years)		
			50	100	200
1	Gumbel	(2p)	*182.11(10.18)**	200.12(11.70)	218.08(13.22)
	Log-normal	(2p)	180.95(12.26)	198.10(14.59)	215.19(17.05)
	Pearson III	(3p)	182.33(13.29)	198.70(15.91)	214.60(18.59)
	SQRT-ET-max	(2p)	204.68(13.59)	232.48(16.54)	261.79(19.73)
	Log-normal	(3p)	184.46(14.73)	202.97(18.73)	221.55(23.23)
	G.E.V.	(3p)	183.76(15.03)	202.10(20.12)	220.24(26.27)
2	Gumbel	(2p)	229.39(12.97)	252.29(14.90)	275.11(16.84)
	Log-Gumbel	(3p)	220.32(15.01)	236.25(18.98)	250.48(23.88)
	Log-normal	(2p)	233.79(16.99)	256.19(20.30)	278.54(23.79)
	SQRT-ET-max	(2p)	264.07(17.23)	300.13(20.91)	338.17(24.89)
	Pearson III	(3p)	232.25(23.41)	252.39(28.88)	271.88(34.52)
	Log-normal	(3p)	239.50(26.21)	263.93(34.33)	288.40(43.38)
	G.E.V.	(3p)	244.99(30.07)	271.89(41.17)	298.80(54.02)
3	Gumbel	(2p)	256.91(14.32)	282.23(16.49)	307.46(18.67)
	Log-Gumbel	(3p)	261.15(15.87)	286.32(19.75)	311.14(24.56)
	Log-normal	(2p)	256.17(18.10)	280.15(21.57)	304.04(25.22)
	SQRT-ET-max	(2p)	289.98(19.48)	329.09(23.72)	370.31(28.31)
	Pearson III	(3p)	257.18(22.14)	279.70(26.83)	301.52(31.63)
	Log-normal	(3p)	262.04(25.80)	288.14(33.50)	314.28(42.08)
	G.E.V.	(3p)	267.53(30.96)	296.05(42.37)	324.48(55.67)

表 3.7: 琵琶湖流域の年最大 m 日降水量 (1912-1981) に最尤法であてはめた分布の適合度の比較

m	Prob. distribution	SLSC	MLL	AIC	COR
1	Normal (2p)	0.06175	-342.854	689.708	0.95826
	Log-normal (3p)	0.01721①	-333.668①	673.335	0.99679①
	Log-normal (2p)	0.02476	-334.557	673.113③	0.99332
	Pearson III (3p)	0.02066③	-333.668①	673.336	0.99572③
	Pearson III (2p)	0.03806	-336.246	676.492	0.98748
	Log-Pearson III (3p)	0.01831②	-333.754③	673.507	0.99636②
	SQRT-ET-max (2p)	0.02676	-333.790	671.579①	0.99114
	G.E.V. (3p)	0.02594	-333.876	673.752	0.99139
	Gumbel (2p)	0.02890	-334.387	672.774②	0.99402
	Log-Gumbel (3p)	0.02251	-333.876	673.752	0.99402
	Log-Gumbel (2p)	0.04306	-335.565	675.130	0.98340
2	Normal (2p)	0.05635	-364.446	732.893	0.96525
	Log-normal (3p)	0.02270	-356.746②	719.493	0.99439
	Log-normal (2p)	0.02498	-357.342	718.683③	0.99320
	Pearson III (3p)	0.01678①	-356.175①	718.350①	0.99692①
	Pearson III (2p)	0.03045	-358.555	721.110	0.99191
	Log-Pearson III (3p)	0.02254	-356.976③	719.952	0.99444③
	SQRT-ET-max (2p)	0.02845	-357.194	718.388②	0.99123
	G.E.V. (3p)	0.02192③	-357.305	720.611	0.99405
	Gumbel (2p)	0.02136②	-357.549	719.098	0.99602②
	Log-Gumbel (3p)	0.02191	-357.305	720.611	0.99431
	Log-Gumbel (2p)	0.04890	-359.060	722.119	0.97676
3	Normal (2p)	0.05243	-373.300	750.601	0.96992
	Log-normal (3p)	0.01619①	-366.516②	739.033	0.99717①
	Log-normal (2p)	0.01890③	-366.850	737.701①	0.99613③
	Pearson III (3p)	0.02024	-366.030①	738.060③	0.99552
	Pearson III (2p)	0.02773	-367.876	739.751	0.99312
	Log-Pearson III (3p)	0.01799②	-366.668③	739.336	0.99649②
	SQRT-ET-max (2p)	0.03726	-366.947	737.895②	0.98457
	G.E.V. (3p)	0.02694	-366.902	739.804	0.99103
	Gumbel (2p)	0.02389	-367.031	738.061	0.99416
	Log-Gumbel (3p)	0.02448	-366.902	739.804	0.99290
	Log-Gumbel (2p)	0.05212	-369.377	742.754	0.97468

① denotes the best distribution for each criterion;

② and ③ the second and the third, respectively.

表 3.8: jackknife 法によって求められた確率水文量の推定値 * と推定誤差 **

[琵琶湖流域の年最大 m 日降水量 (1912-1981)]

m	Prob. distribution	Return period, T (years)		
		50	100	200
1	Gumbel (2p)	172.83(11.06)	189.73(12.68)	206.56(14.30)
	Log-normal (2p)	172.76(12.72)	189.06(15.08)	205.32(17.55)
	Pearson III (3p)	175.17(13.56)	191.10(16.11)	206.59(18.71)
	SQRT-ET-max (2p)	189.98(14.18)	215.10(17.21)	241.56(20.48)
	Log-normal (3p)	181.66(16.57)	201.84(21.60)	222.40(27.47)
	Log-Pearson III (3p)	183.75(17.91)	205.66(24.42)	228.41(32.45)
2	Gumbel (2p)	239.64(13.81)	263.58(15.84)	287.43(17.87)
	Log-normal (2p)	236.13(16.74)	259.44(19.87)	282.78(23.17)
	SQRT-ET-max (2p)	260.96(18.77)	296.66(22.67)	334.32(26.87)
	Pearson III (3p)	226.79(24.48)	245.18(30.98)	262.85(37.79)
	Log-normal (3p)	243.39(27.71)	269.30(38.39)	295.22(51.03)
	Log-Gumbel (3p)	243.23(26.76)	269.76(39.22)	295.98(55.06)
3	G.E.V. (3p)	247.19(29.01)	275.65(42.43)	304.17(59.33)
	Gumbel (2p)	269.30(15.77)	296.43(18.11)	323.46(20.46)
	Log-normal (2p)	269.79(18.97)	296.69(22.55)	323.64(26.34)
	Pearson III (3p)	270.11(20.62)	295.06(24.85)	319.31(29.23)
	SQRT-ET-max (2p)	300.10(21.60)	341.61(26.16)	385.43(31.10)
	Log-normal (3p)	280.25(24.41)	311.57(32.03)	343.39(40.89)
3	Log-Gumbel (3p)	270.15(24.99)	297.27(35.36)	323.68(48.50)

表 3.9: St. Marys 川の年最大日流量 (1916–1974) に最尤法であてはめた分布の適合度の比較

Prob. distribution		SLSC	MLL	AIC	COR
Normal	(2p)	0.06806	-588.313	1180.627	0.94922
Ln-normal	(3p)	0.02189	-580.535②	1167.069	0.99479
Ln-normal	(2p)	0.02416	-580.808	1165.615①	0.99365
Pearson III	(3p)	0.03045	-580.510①	1167.019	0.99054
Pearson III	(2p)	0.04734	-582.138	1168.275	0.98037
Ln-Pearson III	(3p)	0.02117②	-580.549③	1167.098	0.99516②
SQRT-ET-max	(2p)	0.02173③	-580.829	1165.659②	0.99502③
G.E.V.	(3p)	0.02211	-580.597	1167.195	0.99450
Gumbel	(2p)	0.04001	-580.850	1165.700③	0.99138
Ln-Gumbel	(3p)	0.01955①	-583.629	1170.258	0.99544①
Ln-Gumbel	(2p)	0.04821	-583.187	1170.375	0.98133

① denotes the best distribution for each criterion;

② and ③ the second and the third, respectively.

- 江藤が最近提案した平方根指数型最大値分布は、上記 3. の手順でけりがつかないような場合に有用かも知れない。3.4.1 で見た大阪の年最大日降水量の場合はその典型的な例である。ただ、平方根指数型最大値分布は、2, 3 日降水量には適合しにくいようである。この分布は右方に長く尾を引く分布であり、相対的に飛び抜けて大きな値の生じ得る日降水量の場合には良い適合度を示すことがあるが、2 日以上になると降水量の値が相対的に平滑化される（右方に長く尾を引かなくてもよくなる）ので適合度が悪くなるものと思われる。時間単位がさらに短いデータには有用であろう。右方に長く尾を引く分布であるため、確率水文量の値が常に大きめに与えられることに留意する必要がある。
- 2 母数のどの分布に対しても良い適合度が得られない場合には、3 母数の分布をあてはめ適合度の悪いものを除去する。残った分布に対して jackknife 法を適用し確率水文量の変動の小さい分布を選ぶ。
- 適合度至上主義の立場に立てば、表 3.1, 3.3, 3.5, 3.7 で見てきたように、3 母数の分布の方がよい。特に、3 母数対数正規分布はほとんどすべてのデータに良く適合する。この分布がこれまで多用されてきたのも大いに納得できるところである。3 母数 PearsonIII 型分布は、SLSC 値の悪い場合が少しあるが、MLL 値はいつも 1 位（大阪の場合のみ 2 位）であり、PearsonIII 型分布や対数 PearsonIII 型分布が海外で多用される事情が理解できる。

3.5 河川流量の極値データへの適用

同じ手順を、河川流量の極値データに適用してみた (Takara and Takasao (1988))。対象としたのは、St. Marys 川の年最大日流量 (1916–1974 年の 59 年間; 単位は ft^3/s ; Kite (1977)) と、Ganga 川の年最大ピーク流量 (1885–1971 年の 87 年間; 単位は m^3/s ; Raghunath (1985)) である。

3.5.1 St. Marys 川の年最大日流量

a) 適合度の比較

表 3.9 に適合度を示す。適合度が 1 位の分布モデルは、SLSC, COR で 3 母数対数 Gumbel 分布、MLL で 3 母数 PearsonIII 型分布、AIC では 2 母数対数正規分布である。Gumbel 分布は、SLSC = 0.04001 とあまり良くない。また、米国の Water Resources Council が極値流量に対して推奨している対数 PearsonIII 型分布は比較的良い適合度を与えている。

図 3.4 に、あてはめた平方根指数型最大値分布、Gumbel 分布、3 母数対数 Gumbel 分布の確率密度曲線をデータのヒストグラムとともに示す。ピーク付近で Gumbel 分布の適合度は良いように見えるが、右裾の方の適合度は

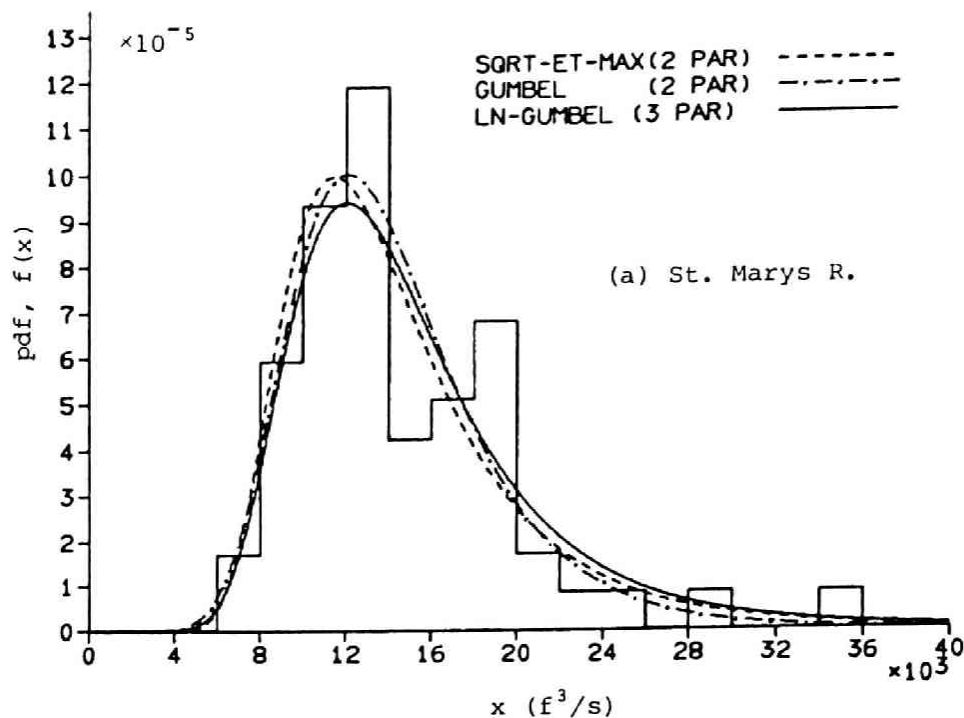


図 3.4: St. Marys 川の年最大日流量 (1916-1974) に最尤法であてはめた分布

他の二つに比べて劣る。このデータのように飛び抜けて大きな値を含む標本に対しては、平方根指数型最大値分布は、2 母数ではあるけれども良い適合度を得ることができる。

b) 確率水文量の変動性

表 3.9 においてどれかの適合度規準でベスト 4 にランクされた八つのモデルについて、jackknife 法を適用した。その結果を表 3.10 に示す。GEV 分布、3 母数対数正規分布の二つは推定誤差がかなり大きく、3 母数対数 Gumbel 分布、平方根指数型最大値分布は確率水文量をかなり大きく見積ることになる。推定誤差が最も小さいモデルは Gumbel 分布である。AIC で 1 位である 2 母数対数正規分布は、SLSC も比較的良好 (0.02416) であり、確率水文量の推定値は Gumbel 分布のそれに近い。これらのことから、Gumbel 分布が、SLSC 値は良くないが AIC は 3 位であり、確率水文量の変動が最も小さいので、このデータに対して最良であるとしてよいものと思われる。

3.5.2 Ganga 川の年最大ピーク流量

a) 適合度の比較

表 3.11 に適合度を示す。適合度が 1 位の分布モデルは、SLSC, COR で 3 母数対数正規分布, MLL で 3 母数 PearsonIII 型分布, AIC では平方根指数型最大値分布である。2 母数対数正規分布も St. Marys 川の場合と同様、比較的良好である。Gumbel 分布は、SLSC, MLL, AIC, COR がそれぞれ 8, 8, 7, 8 位であり、適合度評価でふり落とされる。実際、図 3.5 に示されるように、ピーク付近でも、また、右裾の尾の方でも適合度が悪い。

b) 確率水文量の変動性

表 3.12 には、適合度評価においてどれかの規準でベスト 5 にランクされた分布について、jackknife 法を適用した結果を示した。参考のため、Gumbel 分布についても併記したが、Gumbel 分布は極端に小さな確率水文量を与え、このデータに対しては全く問題にならない。推定誤差が最も小さい平方根指数型最大値分布が最良であると言える。図 3.5 を見ると、適合度の点からも良好であることがわかる。この分布は、一雨総雨量の年最大値分布として考案されたものであるが、極値流量にも良いことがわかる。特に、Gumbel 分布が良くないとき、候補に挙げてもよい分布モデルである。GEV 分布は、極値降水量・流量データに対して、適合度のランクは 4, 5 位に入ることが多いが、確率水文量の推定誤差が常に大きい。

表 3.10: jackknife 法によって求められた確率水文量の推定値 * と推定誤差 **

[St. Marys 川の年最大日流量 (1916-1974)]

Prob. distribution	Return period, T (years)		
	50	100	200
Gumbel (2p)	27301 (1819)**	30008 (2086)	32705 (2354)
Ln-Gumbel (3p)	34550 (1981)	39471 (2462)	44722 (3009)
SQRT-ET-max (2p)	32489 (2162)	37103 (2619)	41979 (3113)
Ln-Pearson III (3p)	25820 (2062)	28094 (2719)	30309 (3517)
Ln-normal (2p)	27268 (2301)	29882 (2746)	32491 (3214)
Pearson III (3p)	29290 (2366)	32295 (2803)	35242 (3245)
Ln-normal (3p)	28507 (3234)	31634 (4188)	34808 (5254)
G.E.V. (3p)	24742 (3946)	27442 (5126)	30266 (6523)

表 3.11: Ganga 川の年最大ピーク流量 (1885-1971) に最尤法であてはめた分布の適合度の比較

Prob. distribution	SLSC	MLL	AIC	COR
Normal (2p)	0.07389	-823.205	1650.410	0.94032
Ln-normal (3p)	0.02114①	-808.045②	1622.089	0.99514①
Ln-normal (2p)	0.02316	-808.456	1620.912②	0.99416③
Pearson III (3p)	0.02861	-807.745①	1621.490③	0.99157
Pearson III (2p)	0.04573	-810.732	1625.464	0.98303
Ln-Pearson III (3p)	0.02139②	-808.183③	1622.367	0.99503②
SQRT-ET-max (2p)	0.02372	-808.331	1620.663①	0.99304
G.E.V. (3p)	0.02329	-808.546	1623.091	0.99298
Gumbel (2p)	0.04299	-809.826	1623.651	0.98881
Ln-Gumbel (3p)	0.02287③	-808.547	1623.093	0.99382
Ln-Gumbel (2p)	0.05229	-811.870	1627.741	0.97617

① denotes the best distribution for each criterion;

② and ③ the second and the third, respectively.

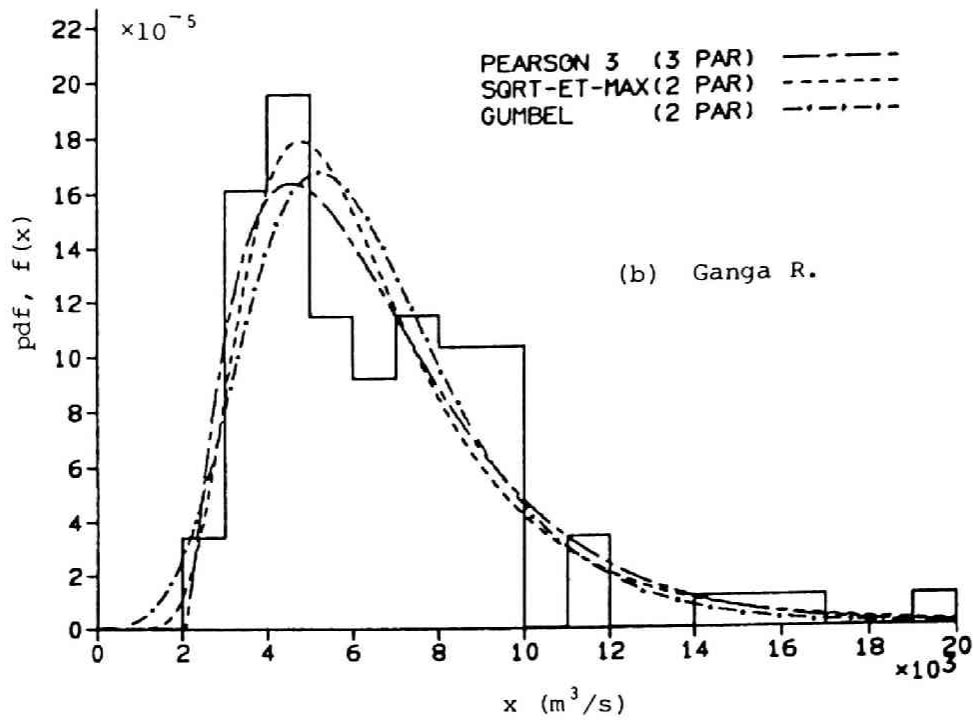


図 3.5: Ganga 川の年最大ピーク流量 (1885-1971) に最尤法であてはめた分布

表 3.12: jackknife 法によって求められた確率水文学量の推定値 * と推定誤差 **

[Ganga 川の年最大ピーク流量 (1885-1971)]

Prob. distribution		Return period, T (years)		
		50	100	200
SQRT-ET-max	(2p)	*16014 (1206)**	18529 (1469)	21199 (1754)
Pearson III	(3p)	15810 (1269)	17762 (1518)	19689 (1772)
Ln-normal	(2p)	14811 (1243)	16687 (1519)	18611 (1818)
Ln-Pearson III	(3p)	14365 (1377)	16159 (1947)	17976 (2671)
Ln-normal	(3p)	15415 (1653)	17560 (2193)	19789 (2818)
Ln-Gumbel	(3p)	16714 (1608)	19804 (2171)	23278 (2868)
G.E.V.	(3p)	15790 (1949)	18238 (2836)	20848 (3981)
Gumbel	(2p)	13939 (937)	15488 (1071)	17030 (1208)

表 3.13: 各評価規準で最良の分布

データ	適合度規準				確率水文量 の変動性	備考 S,M,A,C
	SLSC	MLL	AIC	COR		
(降水量)						
大阪 ($m=1$)	LN(3)	LN(3)	SQEM(2)	LN(3)	SQEM(2)	5,4,1,5
大津 ($m=1$)	LN(3)	PIII(3)	PIII(3)	LN(3)	GUM(2)	4,7,3,4
大津 ($m=2$)	LN(3)	PIII(3)	PIII(2)	LN(3)	PIII(2)	4,2,1,4
大津 ($m=3$)	LN(3)	PIII(3)	PIII(2)	LN(3)	PIII(2)	4,2,1,2
彦根 ($m=1$)	LPIII(3)	PIII(3)	LN(2)	LPIII(3)	GUM(2)	6,7,2,5
彦根 ($m=2$)	LN(3)	PIII(3)	LN(2)	LN(3)	GUM(2)	6,7,2,6
彦根 ($m=3$)	LN(3)	LN(3), PIII(3)	LN(2)	LN(3)	GUM(2)	5,6,2,5
琵琶湖 ($m=1$)	LN(3)	LN(3), PIII(3)	SQEM(2)	LN(3)	GUM(2)	8,7,2,4
琵琶湖 ($m=2$)	PIII(3)	PIII(3)	PIII(3)	PIII(3)	GUM(2)	2,8,4,2
琵琶湖 ($m=3$)	LN(3)	PIII(3)	LN(2)	LN(3)	GUM(2)	5,8,4,5
(流量)						
St. Marys 川	LG(3)	PIII(3)	LN(2)	LG(3)	GUM(2)	8,7,3,7
Ganga 川	LN(3)	PIII(3)	SQEM(2)	LN(3)	SQEM(2)	6,4,1,5

括弧内の数字は母数の個数。備考欄は、確率水文量の変動が最小のモデルの適合度の順位を示す。

LN: 対数正規分布, PIII: PearsonIII 型分布, LPIII: 対数 PearsonIII 型分布,

GUM: Gumbel 分布, LG: 対数 Gumbel 分布, SQEM: 平方根指数型最大値分布。

3.5.3 まとめ

極値流量に関する本項の結果から次のようなことが言える。

1. 適合度が良く、確率水文量の変動が小さい分布モデルは、St. Marys 川の年最大日流量のとき Gumbel 分布、Ganga 川の年最大ピーク流量のとき平方根指数型最大値分布である。
2. Gumbel 分布が適合しないようなデータに対しては、平方根指数型最大値分布が有力な代替モデルとなりそうである。
3. 2 母数対数正規分布も極値流量データに対して比較的良好である。
4. 3 母数の分布は、それぞれ良い適合度を得ることができるが、それらのうちどのモデルが良いかは case by case である。
5. 結局、確率分布モデル選択の手順として、降水量データに対して述べた結論 (3.4.3) と同様のことが言える。

表 3.13 は、本章で取り扱ったすべてのデータについて、四つの適合度規準および確率水文量の変動性でそれぞれ最良とみなされた確率分布モデルを整理したものである。SLSC, MLL, COR では 3 母数の確率分布モデルが選ばれる。SLSC, COR では 3 母数対数正規分布が選ばれることが多く、MLL では 3 母数 PearsonIII 型分布が選ばれる傾向がある。AIC では 2 母数の分布 (対数正規, 平方根指数型最大値, PearsonIII 型) が選ばれることが多いが、ときに 3 母数 PearsonIII 型分布が選ばれることがある。すなわち、母数を 1 個増やすと、増やすことによるデメリットを補って余りある適合度の向上が見られることが PearsonIII 型分布の場合にあることがわかる。

確率水文量の変動性から見ると、3 母数の分布が選ばれることはまずない。表中、備考欄には、適合度が良く、かつ、確率水文量の変動の最も小さいモデルが適合度規準で何位にランクされていたかを示している。これを見ると、AIC で上位にランクされているモデルが筆者らの方法で選ばれる可能性が高い。AIC のモデル評価規準としての有用性が窺われる。

3.6 データ個数と確率水文量の推定精度

確率水文量が水工計画立案上の基本となるわけであるが、いままで見てきたように、データの組合せによってその推定値は変動する。すなわち、確率水文量の推定精度というものを認識し、定量的に把握しておくことが重要であ

表 3.14: bootstrap 型のリサンプリングによって得た T 年確率水文量の推定値 *, 推定誤差 **

とデータ数 M との関係 [琵琶湖流域年最大日降水量]

M	Return period, T (years)		
	50	100	200
20	*169.3 (20.9)**	185.6 (23.9)	201.7 (27.0)
30	169.8 (16.6)	186.2 (19.0)	202.5 (21.4)
40	169.9 (14.4)	186.3 (16.4)	202.7 (18.5)
50	170.1 (13.2)	186.5 (15.2)	202.9 (17.1)
60	170.1 (11.9)	186.6 (13.6)	203.0 (15.3)
70	170.1 (10.9)	186.6 (12.5)	203.0 (14.1)
80	170.2 (10.5)	186.7 (12.0)	203.1 (13.5)
90	170.3 (9.5)	186.8 (10.8)	203.3 (12.2)
100	170.6 (9.1)	187.1 (10.5)	203.6 (11.8)
110	170.7 (8.7)	187.2 (9.9)	203.7 (11.2)
120	170.7 (8.1)	187.3 (9.3)	203.8 (10.5)
130	170.7 (7.9)	187.2 (9.0)	203.7 (10.2)
140	170.7 (7.7)	187.3 (8.8)	203.8 (9.9)

る。寒川ら (1986) は、長野県下の 3 地点 (長野, 松本, 上田) について年最大日降水量が Gumbel 分布に従うとして、データ数を 10 から 90 個程度まで経年的に増加させた場合に 50 年, 100 年確率水文量の値がどのように変化していくか調べた。データ数が 30 ~ 40 個以上になるとその値が安定していくことを示している。

ここでは、データの経年的な出現順序に影響を受けないような方法で、データ数と確率水文量の変動性 (推定値だけでなく推定精度も) を定量的に評価してみよう。現在手元にある N 個のデータが、われわれのもつ情報のすべてであり、それを有効に利用しなければならない。そのデータの独立性を仮定すれば、それぞれのデータは等確率 ($1/N$) で生じたものと考えるのが自然である。そこで、 N 個のデータをもつ標本から無作為に繰り返しを許して M 個抽出することにより仮想のデータセットを多数 (B 個) 作り出し、各データセットにある確率分布モデルをあてはめ確率水文量を求める。この作業により得られた B 個の確率水文量の平均, 分散を求める。 $M = N$ のときは bootstrap 法にほかならない。このような bootstrap 型のリサンプリング手法により、標本の大きさ (データ数 M) が確率水文量の推定誤差に及ぼす影響を定量的に評価することができる。

前述の結果から、琵琶湖流域平均年最大日降水量 ($N = 70$) が Gumbel 分布に従うものと考え、 M の増加に伴う確率水文量の推定誤差の推移を検討した。このとき、繰り返し回数 $B = 1000$ として、母数推定法は最尤法を用いた。

表 3.14 は、 $M = 20, 30, \dots, 140$ と変化させたとき、この bootstrap 型のリサンプリングによって得られる 50, 100, 200 年確率水文量の推定値と推定誤差を示したものである。 M が増加すると、推定誤差 (標準偏差) は減少する。元の標本 ($M = N = 70$) の推定誤差に対し、 $M = 110$ で約 2 割減、 $M = 140$ で約 3 割減となる。すなわち、蓄積したデータに、あと 40 年分データが追加されると確率水文量の推定精度は 2 割良くなり、70 年分追加されると 3 割良くなる。逆に、 M が減少すると推定誤差は増加して、 $M = 50$ で約 2 割増、 $M = 20$ で約 2 倍となることがわかる。

すなわち、確率水文量は $N = 20, 70, 140$ のとき、それぞれ 12~13%, 6~7%, 4~5% の推定誤差があると言える。逆に、推定誤差を 10% 以内にするためには、30~40 個のデータ数が必要であると言える。なお、3 母数の確率分布の場合には、この推定誤差はさらに大きくなる。

このように、データの個数と確率水文量の推定誤差との関係を把握することは、非常に重要である。この把握のために、リサンプリング手法は有用な手段である。

3.7 結 語

確率水文量の変動性という問題は実用上きわめて重要であり、それをモデル評価の規準とすることは直観的にも理解し易い。本章での検討により、適合度のみを規準とする従来のモデル評価の問題が明らかにされるとともに、現在よく用いられている（あるいは、最近提案されまだ十分検討の済んでいないような）種々の分布の適合性および確率水文量の変動性が、現実の極値水文データを用いて実証的に明らかにされた。また、jackknife や bootstrap などのリサンプリング手法は、現在手元にあるデータを有効に利用しながら確率水文量や母数の変動性を比較的簡単に調べることができ、非常に有用であると言える。

今日、種々の水文データがかなりの程度蓄積されるとともに、新しい統計技術の開発、計算処理の高速化がなされた。ここで提示した頻度解析モデルの評価手順は容易に実現できるものである。こうした考え方・方法について実務的な立場からの批判を待ちたい。

今後の課題として次のようなものが考えられる。

1. 近年、地球規模または流域規模で気象学的あるいは水文学的条件が変化しており、標本の独立性、等質性が仮定できないことがある。こうした場合の統計解析手法を確立すること。
2. データの蓄積に伴い、従来の極値理論では異常値とみなされてきた飛び抜けて大きな（あるいは小さな）値のまわりに次々と同様の値が観測されるという事態が生じてきている。異常値とみなされていたのには、二つの理由があると考えられる。一つは、データの少なさがその理由であり、いま一つは、極値理論そのものの不適切さである。結局、データの蓄積を待ち、既存のモデルや理論が適用できないと判断されるならば、それに代わる新しいものを構築すること。すなわち、従来の手法の検証と改良。
3. 本論文では、極大水文量のみを取り扱ったが、渇水のような極小水文量にも同様の考え方が適用可能であると思われる。こうした場合への適用性の検討。

近年、水資源システムはますます複雑化、多様化しており、一変数のみならず多変数分布理論の拡充が希求されている。本論文で示したような考え方が、多変数分布の場合にも有効であろうと思われる。この点に関しては、今後の検討を待ちたいと考える。

参 考 文 献

- Akaike, H. (1974): A New Look at the Statistical Model Identification, IEEE Trans. on Autom. Contr., AC-19, pp. 716-723.
- Birdsley, W.E. (1977): A Test for Distinguishing Between Extreme Value Distributions, Journal of Hydrology, Vol. 34, pp. 377-381.
- Cover, K.A. and T.E. Unny (1986): Application of Computer Intensive Statistics to Parameter Uncertainty in Streamflow Synthesis, W.R.R., Vol. 22, No. 3, pp. 495-507.
- Efron, B. (1979): Computers and the Theory of Statistics—Thinking the unthinkable, SIAM Review, Vol. 21, No. 4, pp. 460-480.
- Efron, B. (1982): The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans, SIAM Monograph, No. 38, 92pp.
- 江藤剛治・室田 明・米谷恒春・木下武雄 (1986): 大雨の頻度, 土木学会論文集, 第 369 号 /II-5, pp. 165-174.
- 合田良実 (1988): 極値統計におけるプロットイング公式ならびに推定値の信頼区間に関する数値的検討, 港湾技術研究所報告, 第 27 巻, 第 1 号, pp.31-92.
- 合田良実 (1989): “水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準” への討議, 土木学会論文集, 第 405 号 /II-11, pp. 265-267.

- Gumbel, E.J. (1958):** Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press, 375pp.(河田竜夫・岩井重久・加瀬滋男 (監訳): 極値統計学 — 極値の理論とその工学的応用 —, 生産技術センター新社, 404pp.)
- Hipel, K.W., A.I. McLead, and W.C. Lennox (1977):** Advances in Box-Jenkins Modeling — 1. Model Construction, Water Resources Research, Vol. 13, No. 3, pp. 567-575.
- Kite, G.W. (1977):** Frequency and Risk Analyses in Hydrology, Water Resources Pub., Fort Collins, U.S.A., 224pp.
- Miller, R.G. (1974):** The Jackknife—A Review, Biometrika, Vol. 61, No. 1, pp. 1-15.
- 奥村晴彦 (1986): パソコンによるデータ解析入門, 技術評論社, pp. 215-224.
- Raghunath, H.M. (1985):** Hydrology— Principles, Analysis and Design, Wiley Eastern Ltd., New Delhi, 482pp.
- 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎 (1983): 情報量統計学, 共立出版, pp. 27-64.
- 寒川典昭・荒木正夫・渡辺輝彦 (1986): 確率分布の推定母数の不確実性評価法, 土木学会論文集, 第 375 号 /II-6, pp. 133-141.
- 宝 馨・高棹琢馬 (1988): 水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準, 土木学会論文集, 第 393 号 /II-9, pp. 151-160.
- Takara, K. and T. Takasao (1988):** Evaluation Criteria for Probability Distribution Models in Hydrologic Frequency Analysis, Preprints of the Fifth IAHR International Symposium on Stochastic Hydraulics, 2-4 Aug. 1988, at the University of Birmingham, Birmingham, U.K., Paper A5, 10pp.
- 宝 馨・高棹琢馬 (1989): “水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準” への討議に対する回答, 土木学会論文集, 第 405 号 /II-11, pp. 267-272.
- 宝 馨・高棹琢馬・清水 章 (1987): 水文統計解析における確率分布モデルの評価, 京都大学防災研究所年報, 第 30 号 B-2, pp. 283-297.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1984): 流出モデル評価への情報量規準の導入について, 京都大学防災研究所年報, 第 27 号 B-2, pp. 275-290.
- 高棹琢馬・宝 馨・清水 章 (1986): 琵琶湖流域水文データの基礎的分析, 京都大学防災研究所年報, 第 29 号 B-2, pp. 157-171.
- Tung, Y.-K. and L.W. Mays (1981):** Generalized Skew Coefficient for Flood Frequency Analysis, Water Resources Bulletin, Vol. 17, No. 2, pp. 262-269.

第 2 編

洪水流出予測の確率過程的モデルと手法に関する研究

第1章

概説 — 流出モデル同定・評価の基本的考え方

1.1 流出システム

地球上の大きな水循環システムのなかで、地上に降った水分が流域下流端に流量となって現れるまでの水文事象を総括して流出過程 (runoff process) と言う。いわゆる流域は、この過程を支配する場であり、水文学的には“流出システム” (runoff system) と言われる。

高棹 (1967) は、

流出のシステム (流出系) という場合、それはある確かな物理法則または統計法則にしたがう同質の部分系の順序付けられた集合を意味する。あるいは、単に、相互に関連のある要素 (システム・パラメータ) または部分系の集合体という場合もある。

したがって、流出系の特性を統一的かつ量的に把握するためには、全体系を構成する法則のちがった部分系の分類と選択、ついで各部分系の機構と相互関係を明確にして、全体系の組織的表現を行うことが必要である。

と述べている。

流域を、降水を入力とし流量を出力とするシステムとして捉える端緒となったのは、序論の2.2で述べたように、1932年の Sherman の単位図法であるが、これはシステムの内部機構を考慮していない、いわゆる black-box 的取り扱いであった。非線形性のあまり強くない場面でのその実用的価値は大いに評価できるところであるが、上に引用したような観点、すなわち、内部機構の科学的認識に基づく流出システムの普遍的表現からは、不満足なものであると言える。

図1.1は、流出システムとそれに関わる種々の素過程、要素を概念的に示したものである (Takasao (1986))。流出システムの特性として、複雑性、非線形性、非定常性、非一様性、不確定性などがある。また、流出に関わる素過程として、蒸発散、融雪、遮断、浸透、地表面流、地中流 (中間流)、地下水流、河道流などがあり、地形学的要素として、流域の大きさ、形状、斜面勾配、方向性と標高、土壌の性質、植生、土地利用、河道特性 (断面の大きさと形状、勾配と長さ、粗度、河道網構造) などがあることを示している。

一般にこのような諸々の条件をもつ流出システムを分析し、何らかの方法で表現することは非常に難解な大仕事であるといわざるを得ない。しかしながら、特に、工学的な要請¹のために、これをモデル化し、システム内の水の挙動の定性的・定量的な把握を行う必要があるわけである。次の節では、モデル化の基本的考え方について考察を加えておく。

1.2 流出システムのモデル化の手順

図1.1は、流出システムのモデル化の視点をも示している。すなわち、システムの入出力関係のみを眺める立場が図の左方からの見方であり、black-box 的アプローチと呼ばれる。一方、図の下側からの見方は、流出システムに関わる全ての要素をにらむもので、力学的あるいは物理的 (physically-based) アプローチと呼ばれる。前節でも述べたように、流出システムの分析・モデル化には、後者の見方をとらねばならないというのが基本的な立場である。

システムの特性を表現するモデル (システムモデル) を作成する行為は、“システム同定” (system identification) あるいは単に“モデル化”と呼ばれる。図1.2は、モデル化の手順を示したもの (Takasao (1986), Takasao and Takara (1988)) である。以下に簡単に説明を加えておく。

¹すなわち、水資源システムの計画・管理・保全 — 具体的には、治水計画、洪水の予報と制御、利水計画と管理など。

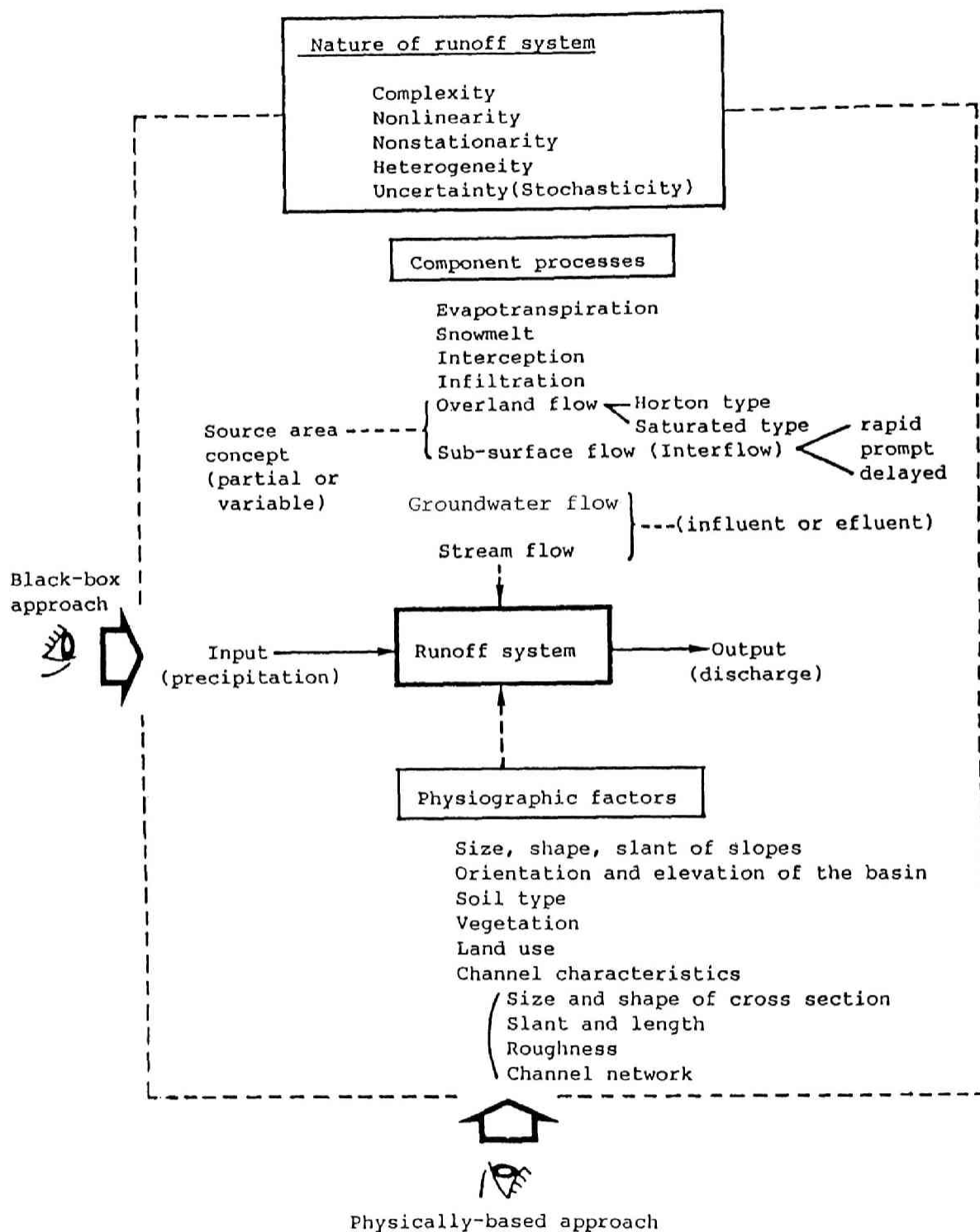


図 1.1: 流出システムのモデル化のアプローチ (Takasao (1986))

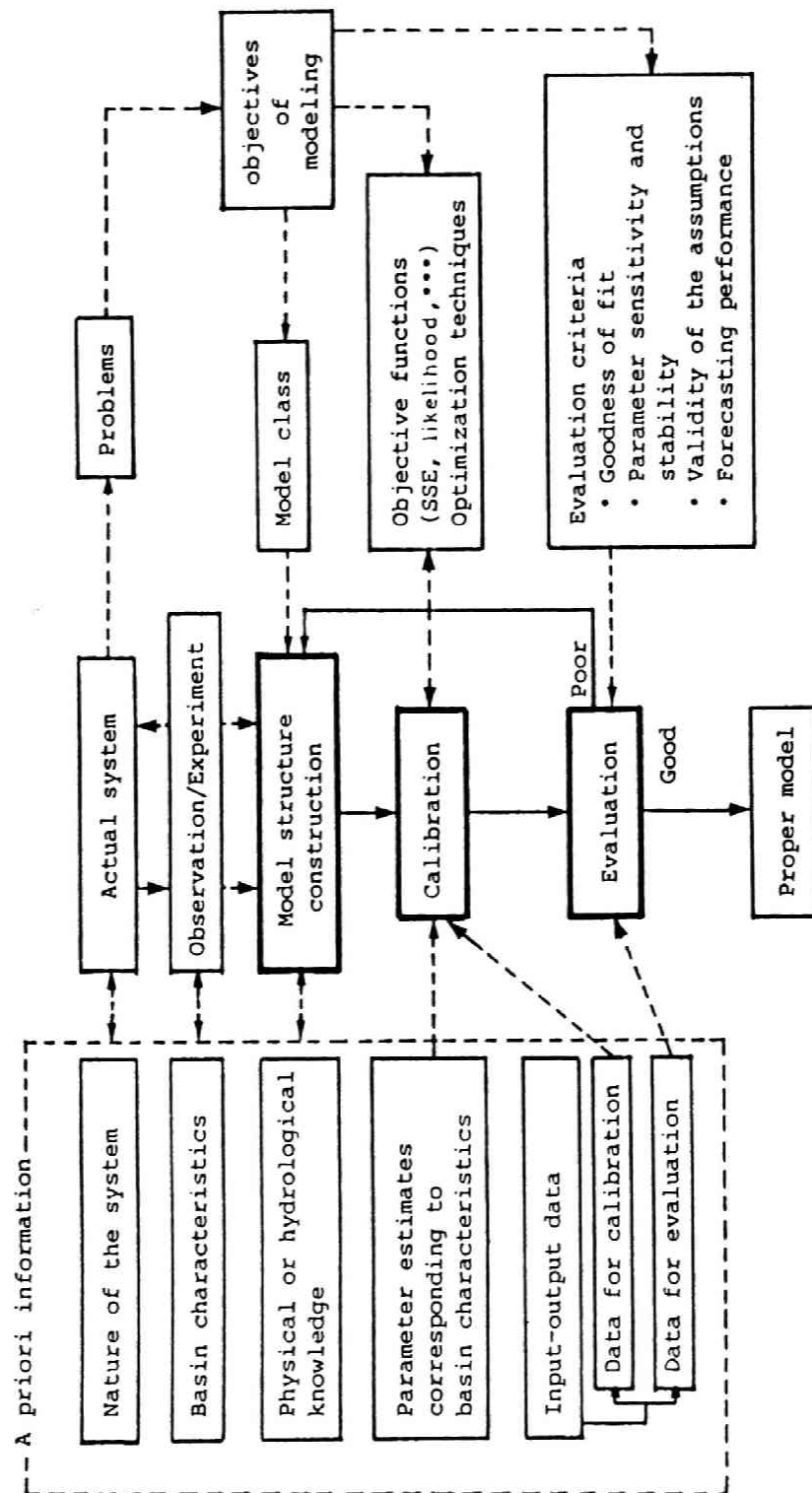


図 1.2: 流出モデルの同定手順 (Takasao (1986))

モデル化の手順の骨格は、

Step 1) モデル構造の決定

Step 2) パラメタ推定

Step 3) モデル評価

という三つのステップからなる。

モデル化しようとする実際のシステムについてわれわれは先験的な情報をもっている²。すなわち、システムの本質的特性、流域の特性、物理的あるいは水文学的知識などであり、場合によっては、流域特性に応じたパラメタ推定値、降雨・流量などのデータも手にしていよう。これらは実験なり観測を通じて得られるものであり、また、先験的情報が実験・観測の方法を規定するというフィードバックが存在する。実際のシステムに対してどのようなモデルを組み立てるか（“モデル構造の決定”）は、これらの先験的情報と実験・観測を通じて決定される一方、対象とする問題とモデル化の目的にも依存し、様々な水準のものが考えられる。モデルの分類については、次節で簡単に触れる。

モデル構造が決定されると、モデルに含まれるパラメタを推定³する。このとき、先験的な推定値を用いることもあり、また、所与の入出力データを用いて何らかの目的関数を最適化することにより推定値を得ることもある。

こうして構造とパラメタの与えられたモデルを何らかの規準を用いて評価し、評価結果が満足であればそのモデルを適切なモデルとみなして採択する。評価結果が不満足であれば、モデル構造の決定のステップまで戻って同じ手順を繰り返すのである。ここで注意したいのは、結果が不満足であった場合、モデル構造にまで戻らず、パラメタ推定に戻ってその推定値を修正することにより、便宜的にモデル化の手順を終了してしまうことが多いことである。こうした便宜的な方法をとることの危険性は、そうして得たモデルを対象とする問題に用いた場合に誤った答を導き出す可能性が高くなるということである。

ただし、このような過ちが起き得るのは、モデル評価の際の評価規準そのものに問題があるとも言える。すなわち、問題とモデル化の目的に応じた適切な評価規準が必ずしも明らかにされていないのである。

1.3 流出モデルの分類

流出システムが大規模で複雑なるが故にその表現が難しいこと、また、流出システムを含む水資源システムの対象とする問題が多様でありモデル化の目的がそれぞれ異なることなどの理由により、これまでにおびただしい数の流出モデルが提案され、実用に供されている。モデル構造の同定の際には、問題とモデル化の目的に応じて、モデルの種類（model class）を予めある程度決めておかねばならない。流出モデルの分類・整理の試みは、既に多くの水文学者によってなされてきたが、たとえば、高棹（1982）は、表現形式上の分類として、

- 確率過程的モデルと決定論的モデル
- 応答モデルと状態空間モデル
- 時間不変モデルと時間変化モデル
- 集中定数モデルと分布定数モデル

としている。ある一つのモデルを取り上げたとき、上記の各項目の二つのうちのどちらかを選んでいくことにより、たとえば、“時間不変の集中定数型確率過程的状态空間モデル”などというようにモデルの特徴を明確に表すことができる。

さて、上記の分類のうち最初のものについては、序論 3.1 の stochastic と deterministic の項で述べたように、両者は対立するものではない。ここでの分類は、あくまでも表現形式上のもので、決定論的に表現できない部分を、何らかの確率的性質をもつノイズ項として式中に陽に取り込んでいるかどうかという観点からの分類なのである。決定論的モデルに分類されるものでも、モデル誤差というような認識で、暗に非決定論的成分を含んでいると言える。

²先験的情報が全くない状況は、モデル化の際の最も厳しい状況である

³“パラメタ同定”（parameter identification）と呼ばれることもある。すなわち、システム同定は、モデル構造の同定とパラメタ同定の両方を含む。

1.4 モデル構造の決定とモデル評価

流出モデルとは、現実の複雑な流出システムを理想化あるいは概念化し、数学的記法によって表現したものである。流出システムは、次のような一般的な形式で記述できる。

$$\{q\} = F(\{r\}, H_0, A) \quad (1.1)$$

ここに、 $\{q\}$ はシステム（流域）からの出力（流量）、 $\{r\}$ はシステムへの入力（降雨）、 H_0 は降雨開始時のシステムの初期条件、 A はシステムの物理的特性や境界条件などを含む場の条件であり、 F はこれらの要素の汎関数であることを示している。流出現象は、大規模で複雑な現象であって、 $\{q\}$ 、 $\{r\}$ 、 H_0 、 A といった諸量は本来時間的空間的に変動するものであり、また、われわれの認識方法そのものもこれらを厳密に把握することはできないから、(1.1) 式は、現実の流出システムの physical and stochastic な変換を表すものである。いわば、(1.1) は、現実のシステムの“完全な”モデルである。

上記の諸量を理想化（平均化）した量として $\{\bar{q}\}$ 、 $\{\bar{r}\}$ 、 \bar{H}_0 、 \bar{A} を用いることにより、システムの平均的な挙動を次のようにモデル化することになる。

$$\{\bar{q}\} = f(\{\bar{r}\}, \bar{H}_0, \bar{A}) \quad (1.2)$$

従来の流出解析では、(1.2) 式における $\{\bar{r}\}$ 、 \bar{H}_0 、 \bar{A} の汎関数 f を模索してきたと言える。そして、多くの場合、観測流量の系列を (1.1) 式の $\{q\}$ とみなし、それと $\{\bar{q}\}$ との適合を図ってきたのである。

ここで、時間的・空間的に変動する $\{q\}$ 、 $\{r\}$ 、 H_0 、 A を $\{\bar{q}\}$ 、 $\{\bar{r}\}$ 、 \bar{H}_0 、 \bar{A} とそれぞれ置き換えたことによって生じる変動成分（あるいはノイズ）を $\{\varepsilon\}$ と記すことにし、(1.2) 式のモデルでこの $\{\varepsilon\}$ をも考慮した場合のシステム出力を次式で表す。

$$\{q\} = f(\{\bar{r}\}, \bar{H}_0, \bar{A}, \{\varepsilon\}) \quad (1.3)$$

この $\{q\}$ は、モデル記述が適切であれば、(1.1) 式の $\{q\}$ と一致すべきものである。

上記のモデル構造の決定のステップでは、関数 f の形式を決める（選択する）ことになる。“完全なモデル”を作成することは困難であるが故に、多くの研究者によって、対象とする目的あるいは先験的情報（観測データも含む）の制約に応じて、様々な流出モデルが提案されてきたのである。

これまでに、実に多くの“概念モデル”が実用的な観点から提案され、物理的な研究成果を取り込みながら改良されてきた。しかしながら、これらのモデルのほとんどが、多かれ少なかれ直観的（時には物理的観点からは明らかに不適切な）と思える表現やサブシステムの連結を含んでいると言える。確固とした物理的な基礎をもつべきであって、システムの単なる直観的理解に基づくべきではないことを強調しておこう。

降雨流出現象は大規模で複雑なものであり、本来分布型のモデルによって記述されるべきである。しかしながら、主として計算上の取り扱い易さから、集中型のモデルによって記述されることが多い。すなわち、

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x(t), c, r(t)) + u \quad (1.4)$$

$$q(t) = H(x(t), c) + v \quad (1.5)$$

ここに、 $r(t)$ は時刻 t における面積雨量強度、 c は (1.2)、(1.3) 式において流域場の条件 \bar{A} を表すパラメタベクトル、 $x(t)$ は時刻 t における状態量ベクトル、 Φ は $x(t)$ 、 c 、 $r(t)$ のベクトル値関数、 H は $x(t)$ 、 c のスカラー関数である。また、 u と v は、それぞれシステムノイズ（あるいはプラントノイズ）、観測ノイズ（出力ノイズ）と呼ばれるもので、(1.3) 式中の $\{\varepsilon\}$ に相当する。ここでは、入出力 ($r(t)$ 、 $q(t)$) がスカラーの単一入力・単一出力 (SISO; single input and single output) システムを考えたが、それらがベクトルの場合、すなわち、多入力・多出力 (MIMO; multi-input and/or multi-output) システムの場合にも容易に議論が拡張できる。流出システムは、実際は分布型のシステムではあるが、適切な集中化 (lumping) の方法によって、(1.4)、(1.5) 式のような形式に変換できる。この形式のモデルは、前項 1.3 の分類で言えば、集中型の確率過程的状态空間型モデルであり、最近、Kalman フィルタ理論を応用したりアルタイムの流出予測のためにしばしば用いられている。これについては、次章で詳細に議論される。

(1.4)、(1.5) 式のモデル構造 Φ や H を決める際に、ノイズ u 、 v に関して何らかの仮定を設ける。通常は、それらのノイズは、定常白色正規性をもつものと仮定される。この仮定は、実用的観点からも便利なものである。この仮定に基づいて、モデルパラメタを推定する⁴。こうして同定されたモデルが、上の仮定を満足するかどうかを検証することはモデル評価の重要な一つの側面である。もし、その仮定が満たされなければそのモデルは不十分であり、モデル構造を変更しなければならない。すなわち、モデル構造決定のステップに戻るべきである。

⁴ 図 1.2 の calibration のステップである

結局、モデル同定・評価の基本的考え方は、以下のように要約できる。モデル化の目的と水文データ（たとえば、雨量、流量など）が与えられたとき、モデル構造を決め（同時にノイズの特性を仮定して）、モデルパラメータを推定する。ノイズ u, v の確率過程的特性を検証することにより、このモデルを評価することができる。もし、それらが白色正規であるならば、モデル構造はほぼ良い（定性的に良い）と言える。もし、それらが白色正規で小さい分散をもつならば、モデル構造が良く、かつ、モデルの精度も良い（定性的かつ定量的にも良い）。すなわち、流出システムに本質的に内在する stochasticity の中からできるだけ非決定論的部分を取り除くこと（流出機構を解明すること）により、このような望ましいモデルが構築されることになる。

以上、流出モデル構築の基本的考え方を述べた。要するに、流出現象が stochastic な物理現象であるという認識のもとに上述のような考え方・手順を適用すればよい。本編では、次の第 2 章で、こうした stochastic な観点からのモデル評価の手法を提示する。また、第 3 章では、確率過程の状態空間モデルに Kalman フィルタ理論を応用したリアルタイムでの洪水予測手法を提示し、詳細に検討する。

参 考 文 献

- 高棹琢馬 (1967): 流出機構, 1967 年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, 67-03, 43pp.
- 高棹琢馬 (1971): 洪水流出系の分析と総合に関する基礎的研究, 128pp.
- 高棹琢馬 (1982): 流出系の同定と予測, 1982 年度 (第 18 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, A-2, 19pp.
- Takasao, T. (1986): Modeling and Forecasting of Runoff Processes in River Basins, Proc. 5th Cong. Asian and Pacific Reg. Div., IAHR, Keynote Lect., Vol. V, pp. 113-149.
- Takasao, T. and K. Takara (1988): Evaluation of Rainfall-Runoff Models from the Stochastic Viewpoint, Journal of Hydrology, Vol. 102, pp. 381-406.

第2章

確率過程的観点からの流出モデルの評価手法

河道の設計や洪水防御施設の規模決定などの河川計画、洪水予報やダム操作、あるいは利水システムの計画・管理など水資源システムのほとんどの問題において、降水の流出計算は基本的な役割を担っている。その計算の道具として、種々の流出モデルが提案されてきた。しかし、多数のモデルのうちどれを用いれば良いのか、というモデル評価の問題については、明確な解答が与えられていないというのが現状である。

さて、ある現象を生じる場としてのシステム（ある確かな物理法則または統計法則に従う均質の部分システムの順序づけられた集合）を理想化・抽象化し、何らかの方法で表現したものがシステムモデルである。したがって、システムモデルは、その現象および場の本質を損なわない程度に理想化されたものでなければならない。降水流出系という大規模かつ複雑なシステムの場合、系内の諸量の空間的・時間的均質化といった形でモデル化されるが、その際、均質とみなしてよいスケールの問題が極めて重要である。この問題は現在のところ十分な解明を見ておらず、その意味で流出モデルは研究途上にあると言える。

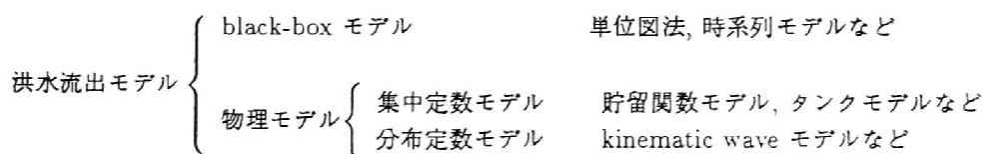
一方、工学的な要請として、理想化された流出モデルをさらに簡略化することがある。たとえば、斜面流出系を取り上げると、一つの斜面に限れば上述のスケールの問題は一応考慮外に置いてよいし、理想化されたモデルとして kinematic wave モデルが存在する。しかしながら、広い流域全体をいくつもの斜面およびそれに付随する河道といった部分システムに分け、それぞれに対して kinematic wave モデルを置いた場合、あるいは、一つの斜面系であっても流出計算を多数回反復する必要がある場合、今日の高速のコンピュータをもってしてもなお計算時間上の問題が厳然と存在する。ここに、理想化されたモデルをさらに簡略化する必要性がある。

本章では、流出現象が本来 physical and stochastic な流出現象であるという観点に立ち、斜面流出系の kinematic wave モデル¹を簡略化した形式のモデルの評価を試みる。

2.1 洪水流出モデルの分類

一口に流出モデルと言っても、そのモデルが考案された背景、目的、用途、構造などまさに千差万別であり、このことがモデルの統一的な評価を困難にしてきた一つの要因である。本章では、対象を洪水流出モデルに限定し、前章で述べたような確率過程的観点からの評価法を提示する。本論に入る前に、この節と次の節において、流出モデルの分類と評価に関する問題点を考察してみよう。

流出モデルの分類については、前章の 1.3 で述べたように、いくつかの考え方があがあるが、ここでは特に洪水流出モデルを対象として簡単に以下のように分類しておく。



洪水流出は、物理現象であるから、用いる目的が何であれ、物理的基礎をもつモデルが望ましい。物理的基礎をもつモデル、すなわち、物理モデル (physically-based model) は、集中定数モデル (lumped parameter model) と分布定数モデル (distributed parameter model) とに大別でき、主として計算上の取り扱いから、その用途はそれぞれ異なる。

¹ 中間流をも考慮したものを含む。

分布定数モデルは、モデルを記述する独立変数として時間のほかに空間座標を含むもので、kinematic wave 法がその例である。全流出システムをできるだけ忠実に表現しようとするものであるから、流出現象の本質的理解という点で優れている。流域をある程度細分化して、それぞれについて斜面・河道の初期条件、境界条件、パラメタを与え雨水流を追跡してゆくことになるので、計算が煩雑になる。したがって、迅速・簡便な計算の場面には適さないが、流域条件・入力条件の局所的な変化を考慮する必要のある流出シミュレーションに有用である。

集中定数モデルは、モデルを記述する独立変数が時間だけのもので、貯留関数法、タンクモデルなどがその例である。流域内の現象との結び付きに欠けるといった欠点がある反面、数理的取り扱いが容易で、実時間予測や広い流域（数百～数千 km^2 ）の流出計算において果たす役割は大きい。その用途の広さゆえ、多数の研究者や実務家が、単純な構造のものから複雑なものまで、多種多様な集中定数モデルを提案しており、まさに“モデルの洪水”とも言える状況にある。

2.2 モデル評価問題が未解決である理由

前節で述べたように、物理モデルにも様々なものがあり、それらのモデルのうちどれを用いるのがよいのかというモデル評価の問題は未解決である。その理由を以下に整理してみた（高棹・椎葉・宝（1984））。

1. 従来、分布定数モデルと集中定数モデルを同列に並べて評価することもあったが、物理性の考慮の度合と用いる目的の異なるもの同士の比較が本来無意味であったと言える。
2. モデルの良否は、当該流域における実測の雨量・流量データを用いて判定されることが多いが、そのデータが量的・質的に不十分である。量的に不十分な例としては、当該流域のデータの不在・偏在が挙げられる。所要の規模・時間分布の降雨流出データがないことにより、モデルの同定・検証が十分に行えないのである。質的に不十分な例として、データの精度、欠測値の存在およびその補充などにおける諸問題が考えられる。
3. たとえ、質の良いデータがかなりの量だけ揃ったとしても、厳密に言えば全く同一の流域条件のもとに得られたものではないから取り扱いが難しい。すなわち、河川流域は、気温・植生・土壌などの季節的変化の他に、森林伐採・ダム建設・都市化や観測地点・方法の改変などにより経年的変化をも示す。これらの季節的あるいは経年的変化は、データに当然反映しているはずであるから多数の洪水データを一様に取り扱うには問題がある。
4. モデルパラメタの求め方がモデル構造に依存して多様であり、それらの既存のモデルをそのまま比較評価することができない。パラメタが流域条件に応じて簡便に求められること、実測の雨量流量データに良く適合することの両方を満たすモデルが望ましいように思われるが、そのようなモデルを見いだすのが難しい現状である。近年、計算機能力の著しい向上により、数学的最適化手法を用いたパラメタ同定が頻繁に行われるようになった。この場合、目的関数および探索法に何を選ぶかという問題があるし、パラメタ数が多くなると計算時間がかかる上に、最適値の探索が不十分に終了することも生じる。
5. 評価規準には何を採用すれば良いのであろうか。従来は、実測流量と計算流量の適合度を評価規準とすることが多かった。しかしながら、モデルの目的が何であるかによって（たとえば、ハイドログラフ全体の形状、最大流量、最大流量生起時刻など、何を合わせたいかによって）、適合度の評価規準が異なってくるはずである。どの評価規準を用いるにせよ、実測データに含まれる誤差が大きいと適合度そのものの意味がないし、ただ単に合えば良いという観点からすればパラメタ数の多い複雑なモデルほど良いモデルであるということになりかねない。結局、ハイドログラフ（モデル出力）の適合度は、モデル評価の十分な規準とは言えないのであり、1.4で述べたようなモデル同定・評価の方法をこの章で試みる。

2.3 モデル評価の方針

物理的な流出モデルは、上述のように、分布定数モデルと集中定数モデルに分類できるが、実際の流出過程との対応という点から見て前者は後者より上位にあり（図 2.1）、また、その用途は必ずしも同じではない。したがって、本章では両者を区別し、集中定数モデルの評価問題を取り扱う。実際、次から次へと新しいモデルが開発され、乱立状態にあるのは、分布定数モデルではなく集中定数モデルの方なのである。

実測のデータをそのまま用いて種々の集中定数モデルを評価することには、2.2 で述べたように問題がある。そこで、実流域との対応がある程度明確な分布定数モデルを介して評価することとする。

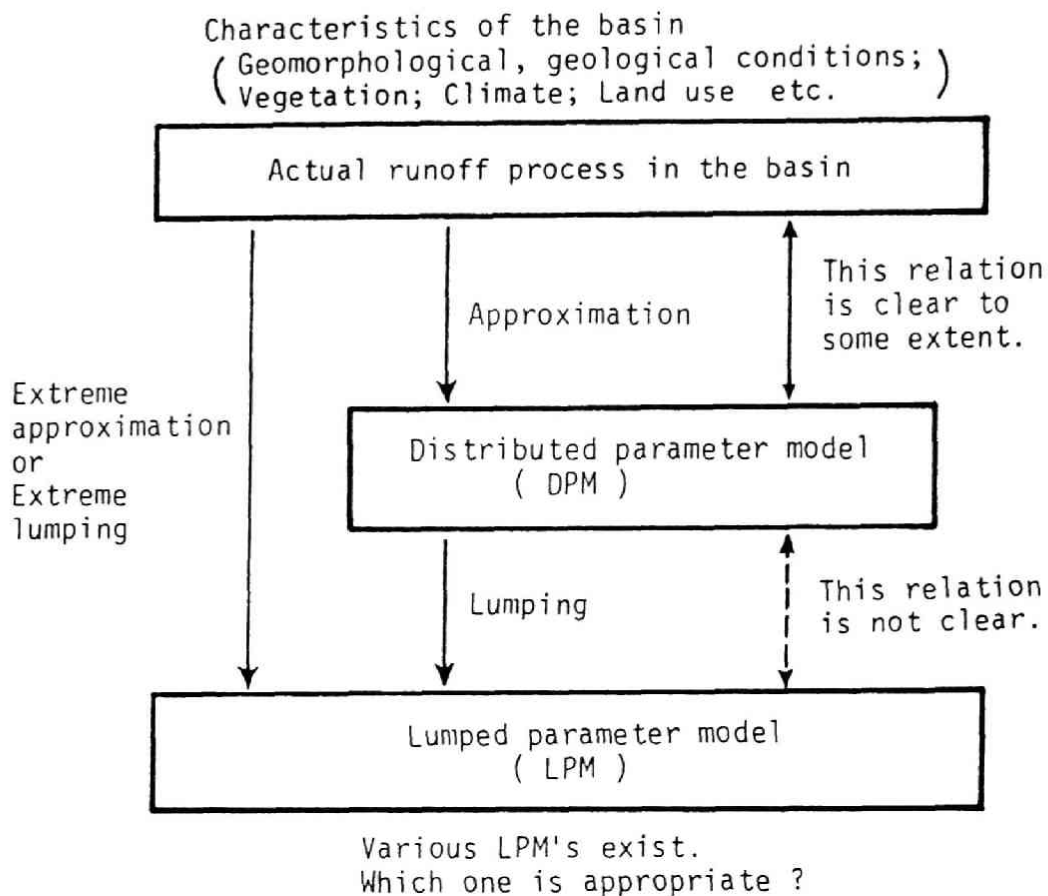


図 2.1: 流出過程と分布定数モデル (DPM), 集中定数モデル (LPM) の関係

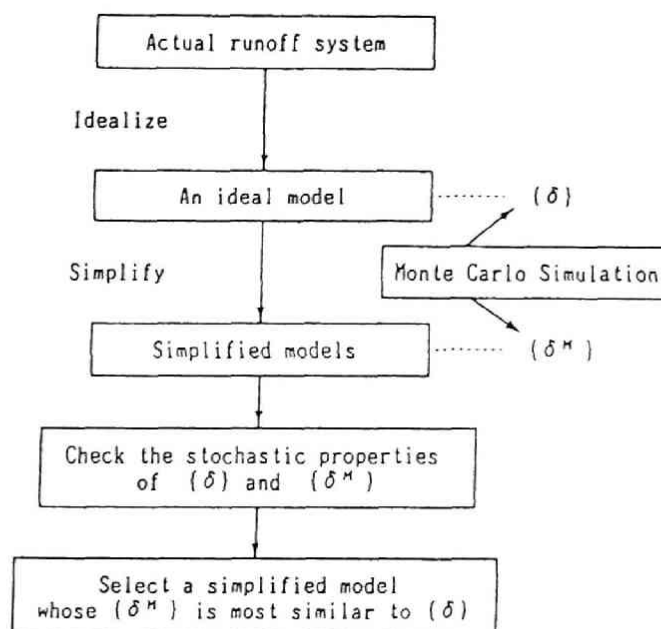


図 2.2: モデル評価の手順

すなわち、流域を分布定数モデルによって記述し、その分布定数モデルの挙動を最も良く表す集中定数モデルを見いだそうとするのである。分布定数モデルと集中定数モデルの対応の問題に限定すれば、実測データは不要となる。つまり、分布定数モデルに所要の規模・パタンの降雨を入力し、模擬流量を発生させて、このデータをモデル評価に用いる。このようにして、分布定数モデルの挙動を最も良く表す集中定数モデルを見いだすことができたなら、それを当該流域の最良の集中定数モデルとする。そして、その集中定数モデルと実現象とのかい離は、専ら分布定数モデルと実現象とのかい離に帰されることとなる。

分布定数モデルを prototype としてそれを介して集中定数モデルの評価を行うという本章の方針の利点は、実測データに含まれる諸々の系統誤差、流域条件（初期条件をも含む）の差異を排除することができることの他に、同一の流域条件で入力条件を自由に変えられるので、種々の洪水をシミュレートすることができ、入力条件と流域特性と集中定数モデルの関連の把握容易となる点である。

2.4 確率過程的観点からの評価法

1.4 の記法を用いると、現実の“完全な”洪水流出モデルは、

$$\{q\} = F(\{r\}, H_0, A) \quad (2.1)$$

で与えられ、システムの平均的挙動を適切に記述するモデルを f とすると、

$$\{\bar{q}\} = f(\{\bar{r}\}, \bar{H}_0, \bar{A}) \quad (2.2)$$

システム内の変動成分²を考慮すれば、

$$\{q\} = f(\{\bar{r}\}, \bar{H}_0, \bar{A}, \{\varepsilon\}) \quad (2.3)$$

である。(2.2) 式と (2.3) 式の出力の偏差は $\{\varepsilon\}$ に起因するものであり、これを $\{\delta\}$ と記すことにする。

$$\{\delta\} = \{q\} - \{\bar{q}\} \quad (2.4)$$

次に、(2.2) 式のモデル f をさらに簡略化することを考える。簡略化したモデルを表す関数を g として、(2.2) 式に対応するものを

$$\{\bar{q}^M\} = g(\{\bar{r}\}, \bar{H}_0, \bar{A}) \quad (2.5)$$

と表す。ここに、 $\{\bar{q}^M\}$ は、 $\{\bar{r}\}, \bar{H}_0, \bar{A}$ を用いて得た簡略化モデルの出力であり、 g が f を適切に簡略化したものであれば、 $\{\bar{q}^M\}$ は $\{\bar{q}\}$ を十分な精度をもって近似するものである。

(2.3) 式と同様に、(2.5) 式で $\{\varepsilon\}$ なる変動成分を考慮したときの出力 ($\{q^M\}$ と表す) は、(2.3) に対応して、

$$\{q^M\} = g(\{\bar{r}\}, \bar{H}_0, \bar{A}, \{\varepsilon\}) \quad (2.6)$$

と表すことにする。

理想化モデルによって与えられる系の平均的挙動 $\{\bar{q}\}$ からの $\{q^M\}$ の偏差を

$$\{\delta^M\} = \{q^M\} - \{\bar{q}\} \quad (2.7)$$

と表す。

従来のモデル評価においては、(2.3) 式、(2.6) 式中の変動成分 $\{\varepsilon\}$ を特に意識することなく、したがって、(2.4)、(2.7) 式の $\{\delta\}, \{\delta^M\}$ の確率特性を明らかにすることなく、主として、 $\{q\}$ と $\{\bar{q}^M\}$ あるいは $\{\bar{q}\}$ と $\{\bar{q}^M\}$ の偏差の“大きさ”のみに着目してきた。しかし、これまでに提案されてきたモデルのどれもが、入力（降雨）と出力（流量）という応答関係にある程度表現することができるため、それらの中でどのモデルが良いかという問題には明確な解答が得られてこなかったようである。流出特性が physical and stochastic であるという立場に立てば、 $\{\delta\}$ や $\{\delta^M\}$ の“大きさ”だけでなく、その確率統計的性質にも着目する必要がある。

こうした観点から、本章では、次のような方針・手順で流出モデルの評価を行う。

Step 1) 洪水流出系を理想化したモデル（分布定数系モデル）を基本として、それを簡略化したモデル（集中定数系モデル）の評価を行う。

²不確定成分。

Lighthill and Whitham (1955) とは全く独立に行われたものである。その後、石原・高棹らは、表面流のみならず、中間流をも考慮し(石原・高棹 (1962), 石原・石原・高棹・頼 (1962)), 近年では、高棹・椎葉らの一連の研究によりさらに発展させられた(高棹・椎葉 (1976, 1979, 1981), 高棹・池淵・椎葉 (1977), 高棹・椎葉・宝 (1982), 椎葉 (1983), Takasao and Shiiba (1988))。海外では、Lighthill and Whitham (1955) 以後、Wooding (1965, 1966), Woolhiser and Liggett (1967), Eagleson (1970), Singh (1975) などがある。

2.5.1 kinematic wave モデルとその無次元化

単一矩形斜面上の kinematic wave モデルは次式で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = r \quad (0 \leq t, 0 \leq x \leq \ell) \quad (2.8)$$

$$w = \alpha h^m \quad (2.9)$$

$$h(x, 0) = 0, \quad h(0, t) = 0 \quad (2.10)$$

ここに、 t : 時間, x 斜面上流端からの距離, h : 流積 (水深), w : 斜面単位幅流量, r : 有効降雨強度, ℓ : 斜面長, α, m : 斜面流定数で、(2.10) 式は初期条件と境界条件である。

以後の解析のために、 $t = t_* T, x = x_* X, h = h_* H, w = w_* W, r = r_* R$ として、(2.8)~(2.10) 式を次のように無次元化する。

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial W}{\partial X} = R \quad (0 \leq T, 0 \leq X \leq 1) \quad (2.11)$$

$$W = H^m \quad (2.12)$$

$$H(X, 0) = 0, \quad H(0, T) = 0 \quad (2.13)$$

ここで無次元化に用いた規準化演算子は次のようである。

$$t_* = (\ell \bar{r}^{1-m} / \alpha)^{1/m} \quad (\text{到達時間あるいは伝播時間}),$$

$$x_* = \ell, \quad h_* = \bar{r} t_*,$$

$$w_* = \alpha h_*^m = \ell \bar{r}, \quad r_* = \bar{r} \quad (\text{平均有効降雨強度})$$

2.5.2 貯留関数モデル

貯留関数モデルは、木村 (1961, 1962) によって提案されたもので、その後現在に至るまで、わが国における洪水予測計算の実用的モデルとして多用されてきた。(2.11), (2.12) 式の無次元化された kinematic wave モデルを簡略化 (集中化) したモデルとして次の三種の貯留関数モデルを取り扱う。

貯留関数式

$$\text{モデル F: } S = K_1 Q^{P_1} \quad (2.14)$$

$$\text{モデル P: } S = K_1 Q^{P_1} + K_2 \frac{dQ}{dT} \quad (2.15)$$

$$\text{モデル H: } S = K_1 Q^{P_1} + K_2 \frac{dQ^{P_2}}{dT} \quad (2.16)$$

ここに、 S は雨水貯留量, Q は流出量, K_1, K_2, P_1, P_2 はモデルパラメタであり、連続式は

$$\frac{dS}{dT} = R - Q \quad (2.17)$$

である。

藤田 (1980) は、上式の K_1, P_1 を矩形降雨の場合の kinematic wave モデルの理論解より、

$$K_1 = \frac{m}{m+1}, \quad P_1 = \frac{1}{m} \quad (2.18)$$

することから“等価粗度法”と呼ばれたりしたが、これらの呼称は解法なりモデルの使い方なりの一面を示しているに過ぎない。より一般的に kinematic wave モデルと呼ぶのがよい。

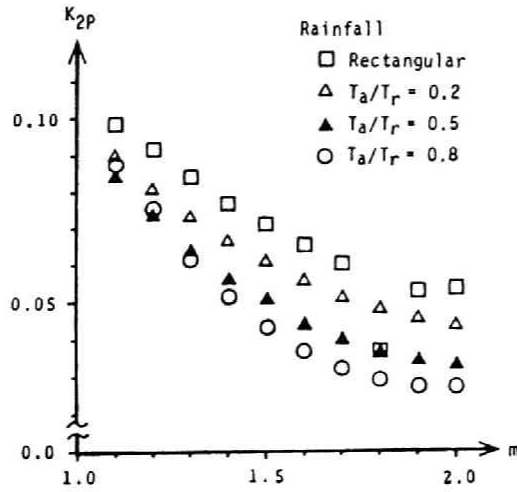


図 2.4: Prasad モデルのパラメタ K_{2P} と m の関係

表 2.1: あてはめた a, b の値

降雨パターン (T_a/T_r)	a	b
矩形降雨	-0.7790	-1.5235
三角形降雨 (0.2)	-0.9195	-1.3830
三角形降雨 (0.5)	-1.2564	-1.0462
三角形降雨 (0.8)	-1.5148	-0.7878

とおき、三角形降雨の場合にも (2.18) 式を採用している。モデル F は、木村のモデルで遅滞時間を 0 とおいたものである。

Prasad (1967) は、 $S-Q$ 曲線の二価性を dQ/dT の項を導入して (2.15) 式の形で表現しようとした。これに対して、星・山岡 (1982) は、矩形降雨の場合の kinematic wave モデルから得られる貯留方程式より、(2.15) 式の K_2 が流量 Q の関数になることを示し、これが流量に依存しないようにするため P_2 なるパラメタを導入して (2.16) 式を提案している。(2.15), (2.16) 式の K_2 を区別するために以下では、前者を K_{2P} 、後者を K_{2H} と記すことにする。 K_{2H}, P_2 の値として星らは、矩形降雨の場合

$$K_{2H} = 0.1m^{0.2}, \quad P_2 = m^{-1.5} \quad (2.19)$$

三角形降雨の場合、降雨ピーク時刻 T_a と降雨終了時刻 T_r の比 T_a/T_r と m の関数でそれらを与えた。

Prasad モデルの場合、 K_{2P} はそのような形で与えられていないので、ここでは、 K_{2P} が m のみの関数であると仮定して数値実験的に K_{2P} の関数形を決めることにした (Takara and Takasao (1985))。その方法は、 m を 1.0 ~ 2.0 の間で 0.1 ごとに動かして kinematic wave モデル (2.11)~(2.13) 式で斜面流出をシミュレートし、最適化手法 (コンプレックス法、目的関数は計算時間間隔 $\Delta T = 0.05$ ごとの流量の誤差二乗和とした) により、それぞれの m に対して K_{2P} を求めた。ただし、降雨波形は矩形、三角形 ($T_a/T_r = 0.2, 0.5, 0.8$) の 4 ケースとして平均降雨強度 1、継続時間 2 とした。結果を図 2.4 に示す。これより、 K_{2P} を次式で与えておく。

$$K_{2P} = \exp(am + b) \quad (2.20)$$

各ケースに対して最小二乗法で求めた定数 a, b の値を表 2.1 に示す。

以後、斜面流が Manning 則に従うとして、 $m = 5/3$ と固定する。このとき、(2.14)~(2.16) 式のモデルパラメタ値は、上記の降雨に対して (2.18)~(2.20) 式などにより表 2.2 のように決まる。図 2.5 にそれらのパラメタを用いた場合の kinematic wave モデルおよびモデル F, P, H のハイドログラフを示す。(2.20) 式で与えたモデル

表 2.2: 貯留関数モデルのパラメタ値

降雨パターン (T_a/T_r)	K_1	P_1	K_{2P}	K_{2H}	P_2
矩形降雨	0.625	0.6	0.05950	0.11076	0.4648
三角形降雨 (0.2)	0.625	0.6	0.05418	0.07572	0.5537
三角形降雨 (0.5)	0.625	0.6	0.04327	0.09608	0.4509
三角形降雨 (0.8)	0.625	0.6	0.03643	0.10441	0.3586

P のハイドログラフの適合度は良好であり、モデル F とモデル H の中間的存在となっている。なお、数値計算は、kinematic wave モデルは Lax-Wendroff 型の差分スキーム (椎葉 (1983)), 貯留関数モデルは Runge-Kutta-Gill 法によった。

2.5.3 斜面流出シミュレーション

想定する斜面は一定勾配で様な粗度を持ち、斜面上の流れが Manning 則に従うとして、場の条件には時間的・空間的な変動がないものとする。また、初期条件は、斜面上に雨水が全くないとする。すなわち、 $A = \bar{A}$, $H_0 = \bar{H}_0$ で、(2.11)~(2.17) 式において、

$$\begin{aligned} \bar{A}: & \quad m = 5/3 \\ \bar{H}_0: & \quad \text{kinematic wave モデル} \quad H(X, 0) = 0, \quad W(X, 0) = 0 \\ & \quad \text{貯留関数モデル} \quad S(0) = 0, \quad Q(0) = 0 \end{aligned}$$

とする。

上の条件に加えて、降雨は斜面上に様に降るものとする。これにより、ここで想定する斜面流出系内に存在する変動成分 $\{\varepsilon\}$ は、降雨の時間的変動のみとみなされる。こうして、降雨強度は時間間隔 ΔT ごとに変動し、 ΔT 内では一定とする。したがって、 $\{\varepsilon\}$ も ΔT ごとの系列で、系への入力 $\{R\} = \{\bar{R}\} + \{\varepsilon\}$ で与えられるとする。

本章では、 $\{\bar{R}\}$ として矩形降雨と三角形降雨を考える。三角形降雨の場合はピーク時刻を変えることにより前半ピーク型、中央ピーク型、後半ピーク型の三通りを取り扱う。すなわち、降雨開始時刻を 0 として、降雨ピーク時刻を T_a 、降雨終了時刻を T_r としたとき、 $T_a/T_r = 0.2, 0.5, 0.8$ の三通りである。このように降雨パターンをいくつか考慮したのは、降雨パターンごとにモデルの評価結果が異なるかも知れないという配慮による。

$\{\varepsilon\}$ は、 ΔT ごとの独立な系列で、正規分布 $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ に従うとする。ただし、 σ_ε は平均降雨強度 \bar{r} の 0.1, 0.5, 1.0 倍の三通りを仮定する。

このような変動成分を含む降雨系列 $\{R\}$ は、先に述べた降雨系列の平均挙動を表す $\{\bar{R}\}$ に対し、 ΔT ごとに発生させた正規乱数の系列 $\{\varepsilon\}$ を付加することにより生成する。ただし、 $R(T) < 0$ となる場合、 $R(T) = 0$ と置く。

2.5.4 kinematic wave モデルの確率変換特性

$\{\bar{R}\}$ を入力とする kinematic wave モデルの出力 $\{Q\}$ は図 2.5 に既に示した。 $\{\bar{R}\}$ に $\{\varepsilon\}$ が加わった場合、この $\{\varepsilon\}$ が原因となって出力 $\{Q\}$ にゆらぎが生じる。すなわち、系内に確率変動成分が存在すれば、出力も確率変動するはずである。本節では、kinematic wave モデルのこうした確率変換特性 ($\{\varepsilon\}$ に対する $\{\delta\}$ の確率統計的性質) をシミュレーションにより調べる。

図 2.5 と同様に、降雨継続時間 $T_r = 2$ 、洪水期間 $T_f = 4$ 、計算時間間隔 $\Delta T = 0.05$ として平均値 0、標準偏差 σ_ε の正規乱数を付加した降雨を用いて流出を 100 回シミュレートし、 ΔT ごとに $\{\delta\}$ を求め、それについてコレログラムとヒストグラムを描く。ただし、 $T_f = 4$ に対し、 $\Delta T = 0.05$ であるから一つのハイドログラフについて 80 個の δ が得られるが、 $T_r = 2$ であるので、降雨に含まれる $\{\varepsilon\}$ の影響が小さいと考えられる後半 30 個の δ は除去して、結局合計 5000 個の δ を取り扱うことにする。

表 2.3 に矩形降雨と中央ピーク型三角形降雨の場合の δ の平均値 $\bar{\delta}$ 、標準偏差 σ_δ を示した。 $\sigma_\varepsilon = 0.1, 0.5, 1.0$ のどの場合に対しても σ_δ は σ_ε の 2 割程度の値となっている。

kinematic wave モデルに確率的入力がある場合の出力の変動は、高樺・椎葉 (1980), Fujita et al. (1980) らが既に検討しているので、ここで得た結果と比較してみよう。

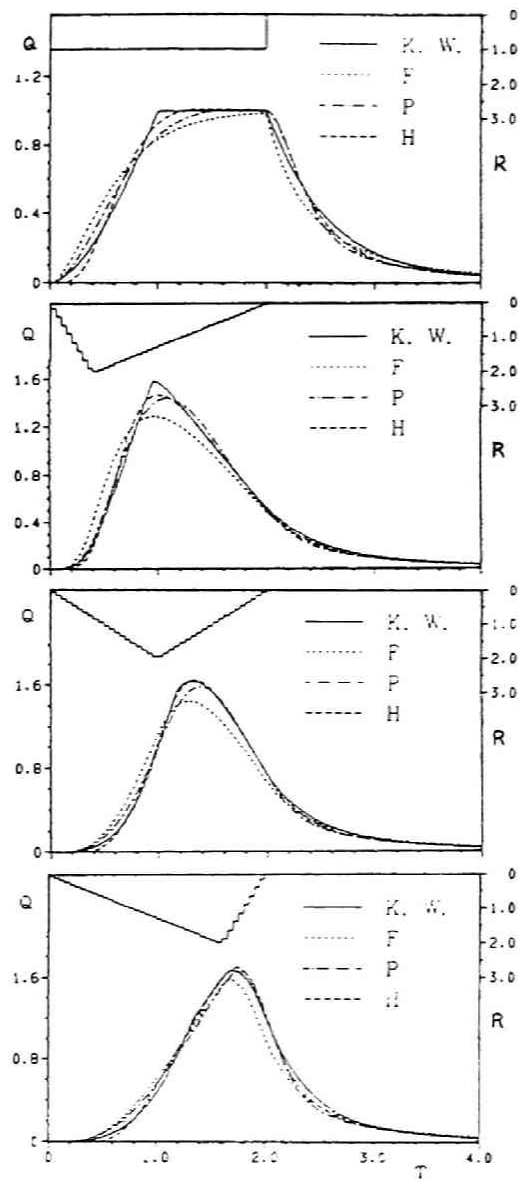


図 2.5: kinematic wave モデルと貯留関数モデルによるハイドログラフ

表 2.3: 出力残差の統計量

σ_ϵ	モデル	矩形降雨		三角形降雨 $T_a/T_r = 0.5$	
		$\bar{\delta}$	σ_δ	$\bar{\delta}$	σ_δ
0.1	K.W.	0.0003	0.0215	-0.0000	0.0219
	F	0.0156	0.0918	0.0242	0.1268
	P	-0.0053	0.0595	0.0059	0.0650
	H	-0.0060	0.0448	0.0020	0.0357
0.5	K.W.	-0.0041	0.1032	-0.0188	0.1009
	F	0.0111	0.1439	0.0047	0.1623
	P	-0.0097	0.1219	-0.0128	0.1180
	H	-0.0102	0.1160	-0.0172	0.1077
1.0	K.W.	-0.0686	0.1913	-0.0921	0.2016
	F	-0.0518	0.2169	-0.0693	0.2445
	P	-0.0754	0.2020	-0.0881	0.2111
	H	-0.0748	0.2063	-0.0916	0.2121

(2.8) 式において,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = r(t) + v(t) \quad (t \geq 0, 0 \leq x \leq 1) \quad (2.21)$$

とおく。ここで, $r(t)$ は降雨強度の平均値で確定的な値をとるものとし, $v(t)$ は降雨の確率変動成分であって, 初期水深 $h(x, 0)$ とは独立な正規白色過程で次のような統計的パラメータをもつものとする。

$$E[v(t)] = 0, \quad e[v(t)v(\tau)] = V\delta(t - \tau); \quad V > 0; \quad t, \tau > 0 \quad (2.22)$$

ここに, $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数である。

こうした場合の水深 $h(x, t)$ の確率分布の推移は, (2.21) 式に適当な線形化を施すことにより,

$$h(x, 0) = 0, \quad r(t) = \bar{r} = \text{一定} \quad (2.23)$$

という簡単な条件のもとに解析的に求められており, 特に, 時間が十分に経過した後の斜面末端 ($x = 1$) の水深の分散 σ_h^2 は, 次式で与えられる (高棹・椎葉 (1980))。

$$\sigma_h^2 = (\bar{r}/\alpha)^{1/m} \cdot V/\{\bar{r}(2m - 1)\} \quad (2.24)$$

(2.11)~(2.13) 式のように無次元化された場合は, (2.24) 式で $\bar{r} = 1, \alpha = 1$ とおくことにより, 斜面末端の水深 $H(1, T)$ の分散は

$$\sigma_H^2 = V/(2m - 1) \quad (2.25)$$

となる。(2.21) 式の $v(t)$ は連続時間でいざされているが, 本章では, 変動成分 ϵ は ΔT ごとの離散的な系列である。このようにとき, $v(t)$ の分散 V と ϵ の分散 σ_ϵ^2 とは次のような関係がある。

$$V = \sigma_\epsilon^2 \cdot \Delta T \quad (2.26)$$

また, 流量と水深とは (2.12) 式のような非線形の関係にあるから, (2.12) 式を水深 $\bar{H} = 1$ のまわりで線形化し, (2.25), (2.26) 式を用いることにより, 流域末端からの流量の分散 σ_W^2 は,

$$\sigma_W^2 = m^2 \sigma_H^2 = \frac{m^2}{2m - 1} \sigma_\epsilon^2 \cdot \Delta T \quad (2.27)$$

となる。いまの場合, $m = 5/3, \Delta T = 0.05$ であるから, 結局,

$$\sigma_W = \frac{m}{\sqrt{2m - 1}} \sqrt{\Delta T} \sigma_\epsilon = 0.244 \sigma_\epsilon \quad (2.28)$$

となる。

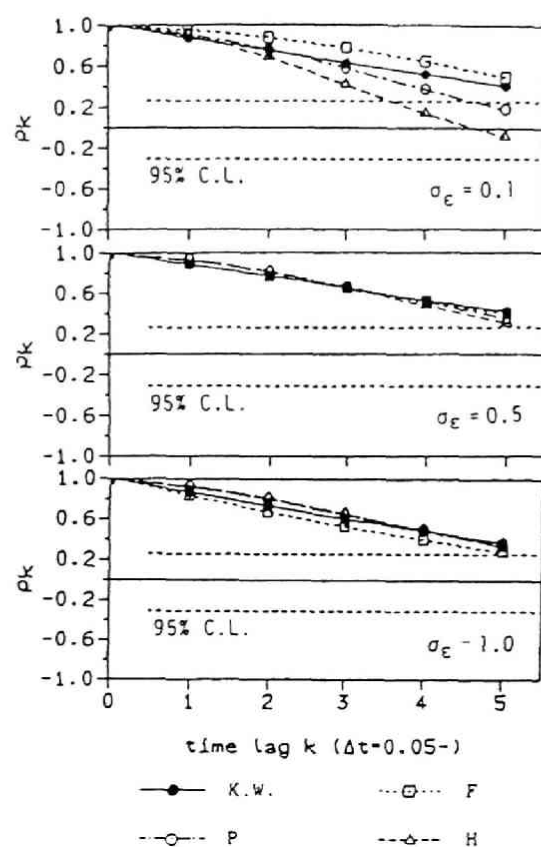


図 2.6: 出力残差のコレログラム

表 2.4: 時間軸上の何点かにおける出力残差の統計量

σ_ϵ	時刻	K.W. モデル		モデル F		モデル P		モデル H	
		$\bar{\delta}$	σ_δ	$\bar{\delta}$	σ_δ	$\bar{\delta}$	σ_δ	$\bar{\delta}$	σ_δ
0.5	0.5	-0.0099	0.0770	-0.1705	0.1028	-0.0864	0.0848	-0.0057	0.0895
	1.0	0.0131	0.1498	0.1538	0.1289	0.1318	0.1274	0.0593	0.1373
	1.5	-0.0267	0.1229	0.0145	0.1299	-0.0244	0.1293	-0.4258	0.1287
	2.0	-0.0136	0.1330	0.0087	0.1453	-0.0232	0.1354	-0.0197	0.1356
	2.5	0.0020	0.0477	0.0738	0.0327	0.0639	0.0468	0.0329	0.0446
1.0	0.5	-0.0409	0.1285	-0.1986	0.1718	-0.1275	0.1361	-0.0506	0.1445
	1.0	-0.0778	0.2700	0.0671	0.2603	0.0394	0.2330	-0.0398	0.2503
	1.5	-0.0916	0.2459	-0.0411	0.2410	-0.1016	0.2713	-0.1100	0.2661
	2.0	-0.0782	0.2319	-0.0661	0.2426	-0.0846	0.2429	-0.0820	0.2467
	2.5	-0.0147	0.0749	0.0591	0.0524	0.0489	0.0753	0.0180	0.0697

表 2.5: 各部分流域の面積 (km²)

	A42	A98	A294
I	6	14	42
II	18	42	126
III	42	98	294

上記の σ_δ は, σ_W に相当するが, σ_δ が σ_ϵ のおよそ 2 割程度となるという数値実験の結果は, (2.28) 式の関係に符合していると言える。

図 2.6 には $\{\delta\}$ のコレログラムを示した。系列 $\{\delta\}$ は見かけ上かなり高い自己相関をもつことがわかる。ただし, 表 2.3 や 図 2.6 は $\{\delta\}$ の確率統計的性質を極めて表面的に眺めた結果に過ぎない。時間軸方向に $\{\delta\}$ の性質を見てみよう。 $T = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ の各時点における δ の平均値と標準偏差を表 2.4 に示した。降雨パタン, σ_ϵ の大きさにかかわらず $T = 1$, すなわち到達時間のあたりの δ の分散 (標準偏差) が大きくなっている。このことは Fujita et al. (1980) によって既に示されている結果と同じである。 δ の変動の大きさのこのような時間的変化傾向には留意する必要がある。

2.5.5 貯留関数モデルの確率過程的評価

2.5.2 で取り扱った 三種の貯留関数モデルのうち, kinematic wave モデルの確率変換特性を最もよく保存するものはどれか, という観点から評価する。

貯留関数モデル F, P, H についても前節と同様にそれぞれの残差系列 $\{\delta^F\}, \{\delta^P\}, \{\delta^H\}$ を求めた。図 2.6 にはそれらのコレログラムも同時に示してあるが, $\sigma_\epsilon = 0.1$ の場合を除くと各モデルのコレログラムは類似しており, モデルの優劣をこの図から判定することは困難である。

貯留関数モデルの残差系列の統計量 (平均値と標準偏差) を, $\{\delta\}$ のそれとともに 表 2.3, 2.4 に示した。図 2.7 には, 各モデルの残差系列のヒストグラムを示す。これらの結果より, どの降雨パタンの場合にもモデル H の残差系列の統計的性質が kinematic wave モデルのそれに最も近く, モデル H が他の二つのモデルより優れていると考えてよい。すなわち, kinematic wave モデルの確率変換特性を最もよく保存するという観点から見ればモデル H が最良である。

確率変動 $\{\epsilon\}$ を考慮した場合のハイドログラフの若干の例を図 2.8 に示す。モデル H が他のモデルよりも kinematic wave モデルの挙動をよく再現していることがこの図からも見て取れ, 表 2.3 および図 2.7 の結果を裏付けている。

2.6 斜面+河道系の表面流モデルの評価

本節では, 斜面+河道系における検討を行う。まず, 斜面流出を kinematic wave モデルでおいた場合, 河道位数と流域面積の変化が確率変換特性にどのような効果を及ぼすか, といった点に着目する。次に, 斜面モデルを貯留関数モデルに置き換えた場合の確率変換特性より, 斜面+河道系において斜面モデルとして採用すべき貯留関数モデルを明らかにしようとする。

2.6.1 想定する流域の概要

図 2.9 に示すような 7 本のセグメント (河道区分) をもつ流域を想定する。流域面積は, 42km², 98km², 294km² の 3 ケースとし, 流域名をそれぞれ A42, A98, A294 と呼ぶことにする。Horton-Strahler の河道位数が 1, 2, 3 のセグメントの下流端にそれぞれ基準地点 I, II, III を設け, 各基準地点より上流の (部分) 流域に I, II, III の記号を付して, A42-I, A42-II, A42-III のように記す。A42, A98, A294 の各場合の部分流域面積を表 2.5 に示す。このような流域を想定したのは, 河道位数の増大, 流域面積の増大による確率変換特性の変化の様子を検討することを意図している。図 2.9 の仮想流域を図 2.10 のように理想化する。すなわち, 各セグメントは長さがすべて同一で, その両側に同一の矩形斜面をもつものとする。セグメント長と斜面長の比は上記のどの場合に対しても 3:1 に固定し, それらの長さは流域面積に応じて変わるものとした (表 2.6)。

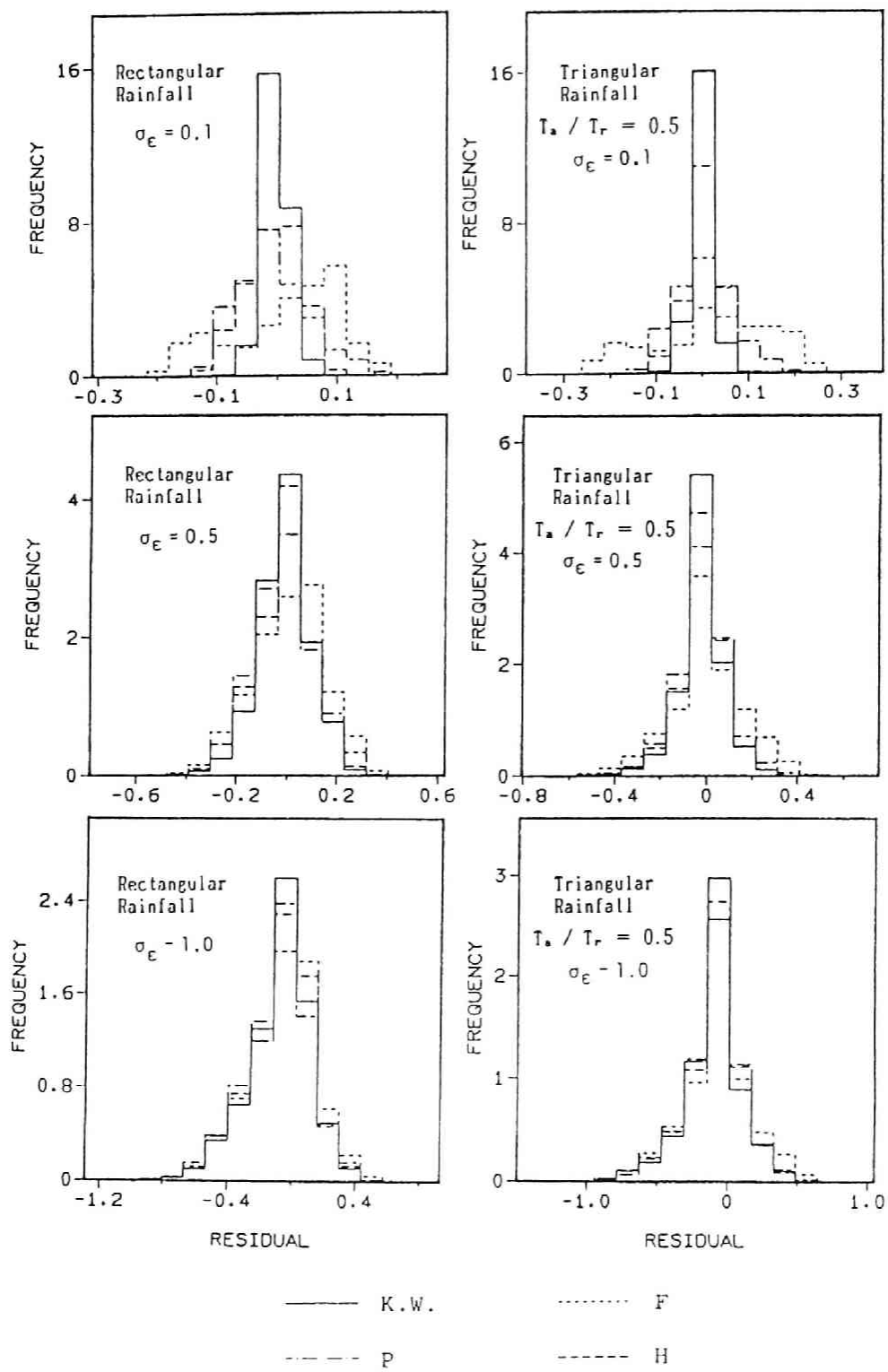


図 2.7: 出力残差系列のヒストグラム

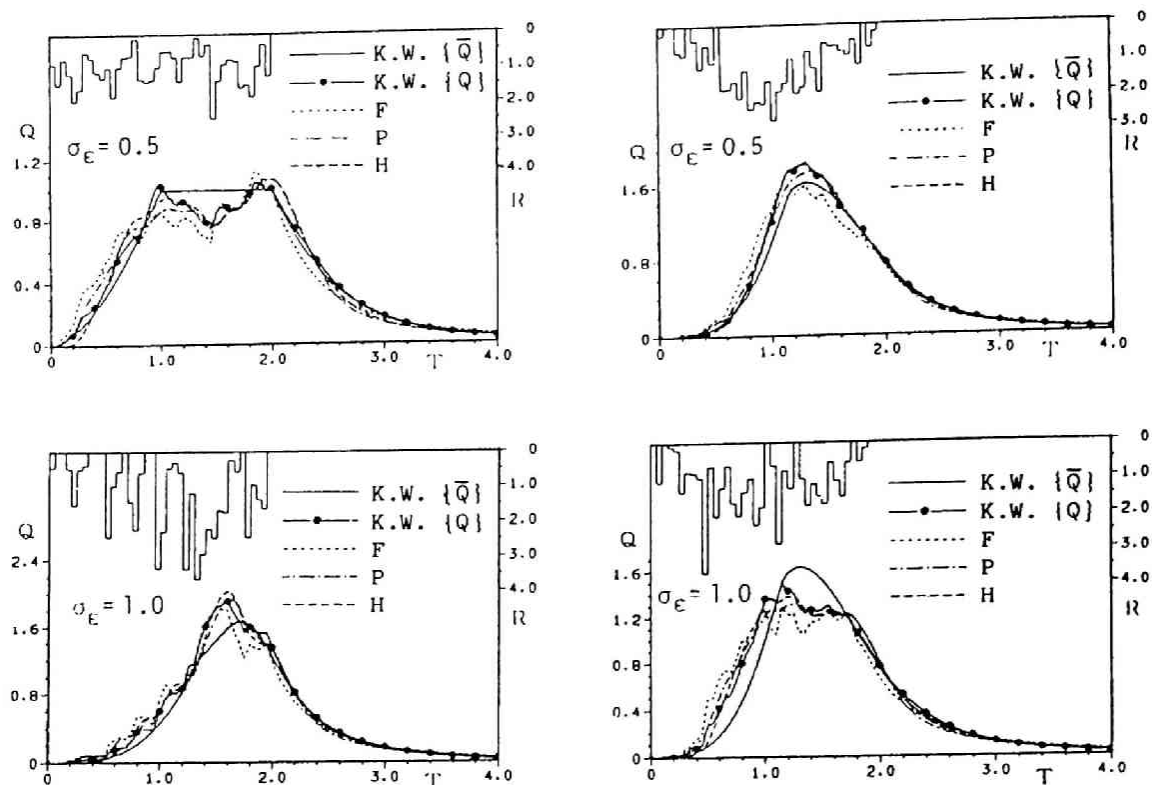


図 2.8: 確率的に変動する入力を与えた場合のハイドログラフの例

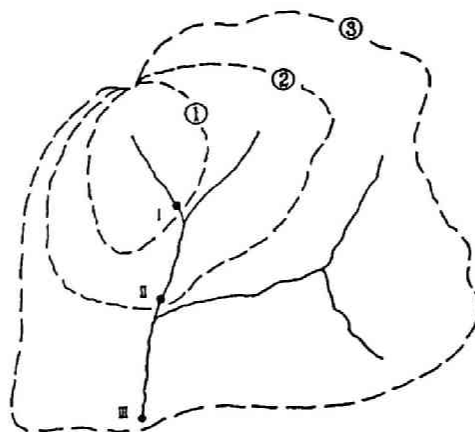


図 2.9: 仮想流域

表 2.6: 斜面および河道系の諸量

流域名	面積 (km ²)	斜面長 (m)	河道長 (m)	斜面系の定数		河道系の定数		到達時間 t_* (hr)	
				α (mm ^{-2/3} /hr)	m	α_c (m ^{1/3} /sec)	m_c	$\bar{r} = 4$	$\bar{r} = 8$
A42	42	1000	3000	0.04020	5/3	0.39	1.45	3.95	2.99
A98	98	1528	4583	0.02634	5/3	0.36	1.45	5.09	3.86
A294	294	2646	7937	0.01521	5/3	0.32	1.45	7.08	5.36

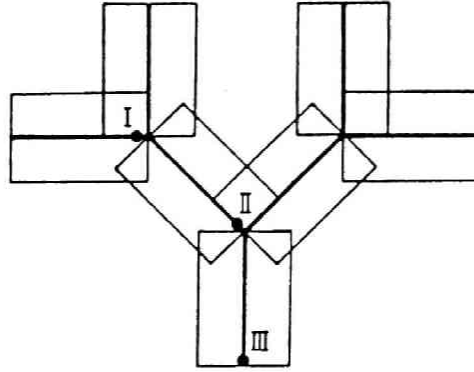


図 2.10: 仮想流域の理想化

2.6.2 想定する降雨パターン

降雨継続時間は 40hr とし、洪水期間は降雨開始から 80hr とする。流量算定の時間間隔 $\Delta t = 1 \text{ hr}$ で、降雨の時間変動も ΔT ごとに考慮する。降雨の平均的挙動のパターンは矩形および三角形（中央ピーク型）の二通りを取り扱い、平均降雨強度 \bar{r} は 8 mm/hr (40hr 続くと 320mm)、4 mm/hr (同じく 160mm) の二通り考慮する。

今日、わが国河川の治水計画における計画降雨の継続時間は 1~2 日程度を取ることが多く、面積数百 km^2 程度の流域で 100 年確率の流域平均雨量は 300~400 mm 位であること、また、現下の観測体制も 1 hr 単位の観測時間間隔というケースが多いことから、現実に応じた想定という意味で、このような想定とした。

2.6.3 斜面流出系モデル

斜面流出系を (2.8)~(2.10) 式の kinematic wave モデルで記述し、Manning 流れを想定する。斜面勾配 i および斜面粗度 n は流域のスケールによらず一定とし、実際の値として、 $i = 0.2$, $n = 0.4 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{sec}$ とした。斜面流定数 $\alpha = \sqrt{i}/n$, $m = 5/3$ より、斜面流の到達時間 $t_* = (\ell \cdot \bar{r}^{1-m}/\alpha)^{1/m}$ が各ケースごとに定まる。それらの値を表 2.6 に示してある。

2.6.4 河道流出モデル

河道の流れは、斜面流出モデルの種類に関係なく、通常の kinematic wave モデルで記述し、流量 q_c と流積 h_c の間に

$$q_c = \alpha_c h_c^{m_c} \quad (2.29)$$

なる関係があるものとする。ただし、

$$\alpha_c = \sqrt{i_c}/n_c \cdot k \quad (2.30)$$

$$k = 0.402A^{-0.114} \quad (2.31)$$

$$m_c = 1.45 \quad (2.32)$$

である。ここに、 i_c : 河道勾配, n_c : 河道の粗度係数 ($\text{m}^{-1/3} \cdot \text{sec}$), k は河道断面の形状に関する係数であり、 H を流積、 R を径深としたとき、定数 m_c を用いて、

$$HR^{2/3} = kH^{m_c} \quad (2.33)$$

と表される。(2.31) 式は、九州の諸河川において上田 (1961) が求めた k と流域面積 A (km^2) の関係式である。 i_c は 5 万分の 1 地形図を用いて神流川流域 (374 km^2) で求めた等価勾配 (上田 (1961)) の値 $i_c = 0.015$ を採用し、 $n_c = 0.1$ とした。

表 2.7: 斜面+河道系における出力残差の標準偏差 (矩形降雨 $\bar{r} = 8\text{mm/hr}$)

流域名	無次元化した 計算時間間隔 ΔT	入力変動の 標準偏差 σ_e (mm/hr)	出力の標準偏差 (mm/hr)				
			斜面系		河道系		
			理論値	計算値	I	II	III
A42	0.3344	4	2.5223	2.1621	1.9935	1.9531	1.9384
		8	5.0447	4.0786	3.6766	3.5755	3.5428
A98	0.2591	4	2.2219	1.9466	1.7656	1.7408	1.7304
		8	4.4438	3.5008	3.2217	3.1673	3.1543
A294	0.1866	4	1.8844	1.6503	1.5211	1.5039	1.4862
		8	3.7688	2.9533	2.7755	2.7460	2.7121

2.6.5 斜面+河道系における確率変換特性

2.6.1~2.6.4 で述べたような条件のもとで、斜面+河道系における確率変換特性を調べる。2.5 では流出シミュレーションを一つのケースにつき 100 回反復したが、ここでは、河道流出の計算にも時間を要するので、反復回数を 50 回とする。それ以外は、2.5 の方法に従うこととするので、対象とする残差系列は一つのケースにつき 2500 個となる。

表 2.7 に、 $\bar{r} = 8\text{mm/hr}$ の矩形降雨で、降雨の変動の標準偏差 $\sigma_e = 4$ および 8mm/hr の場合の各流域における、斜面末端および基準地点 I, II, III での出力 (流出量, mm/hr 単位) の変動を求めた結果を示す。

斜面末端流出の変動の項で理論値とあるのは、2.5.4 の検討と同じく、kinematic wave モデルに確率的に変動する降雨が与えられたときの出力の変動として以下のようにして求めたものである。(2.24), (2.26) 式より、斜面末端の水深の分散 σ_h^2 は、

$$\sigma_h^2 = (\bar{r}/\alpha)^{1/m} \sigma_e^2 \Delta t / \{\bar{r}(2m-1)\} \quad (2.34)$$

で与えられ、定常状態における斜面末端の分散 σ_w^2 は、(2.9) 式を定常状態の水深 \bar{h} のまわりで線形化することにより、

$$\sigma_w^2 = (\alpha m \bar{h}^{m-1})^2 \cdot \sigma_h^2 \quad (2.35)$$

となる。

表 2.7 より、次のようなことが言える。

1. 流出系への入力 (降雨) の中に含まれる変動成分は出力 (流量) の変動として現れるが、出力の変動の大きさは斜面→河道という過程を経るに従って徐々に小さくなっていく。すなわち、平滑化される。
2. 平滑化の度合は、河道よりも斜面において大きく、斜面長が長いほど大きくなる。
3. 面積が等しい区分流域 (A42-III, A98-II, A294-I) の下流端基準点の出力の変動の大きさを比較すると、たとえば、 $\sigma_e = 8$ のとき、それぞれ 3.5428, 3.1673, 2.7755 となっている。すなわち、 42km^2 の流域を斜面+河道系でモデル化するとき、3 次河道まで考慮した場合 (A42-III) の出力の変動の方が、他の場合よりも大きくなる。これは、流域を細かく記述するほど斜面長が短くなることによる。

三角形降雨の場合も表 2.7 と同様の結果を示した (高棹・宝・楠橋 (1985))。

図 2.11 に、 $\bar{r} = 8\text{mm/hr}$ の矩形降雨で $\sigma_e = 4\text{mm/hr}$ の場合の残差系列のコレログラムを示す。流域面積が大きくなる (すなわち、斜面長が長くなる) につれ、各ラグタイムにおける自己相関係数も大きくなることがわかる。また、河道位数が上がっていてもコレログラムの形状はほとんど変わらない。

以上のことから、斜面+河道系の確率変動において斜面の果たす役割は河道に比べて極めて大きいことがわかる。

2.6.6 斜面系の簡略化について

斜面+河道系において、斜面流出モデルを kinematic wave モデルでなく、2.5 で取り扱った貯留関数モデルで扱った場合について検討する。斜面流出モデルを貯留関数モデル F, P, H に置き換えて⁴、上と同様の流出シミュ

⁴河道流出は kinematic wave モデルで追跡。

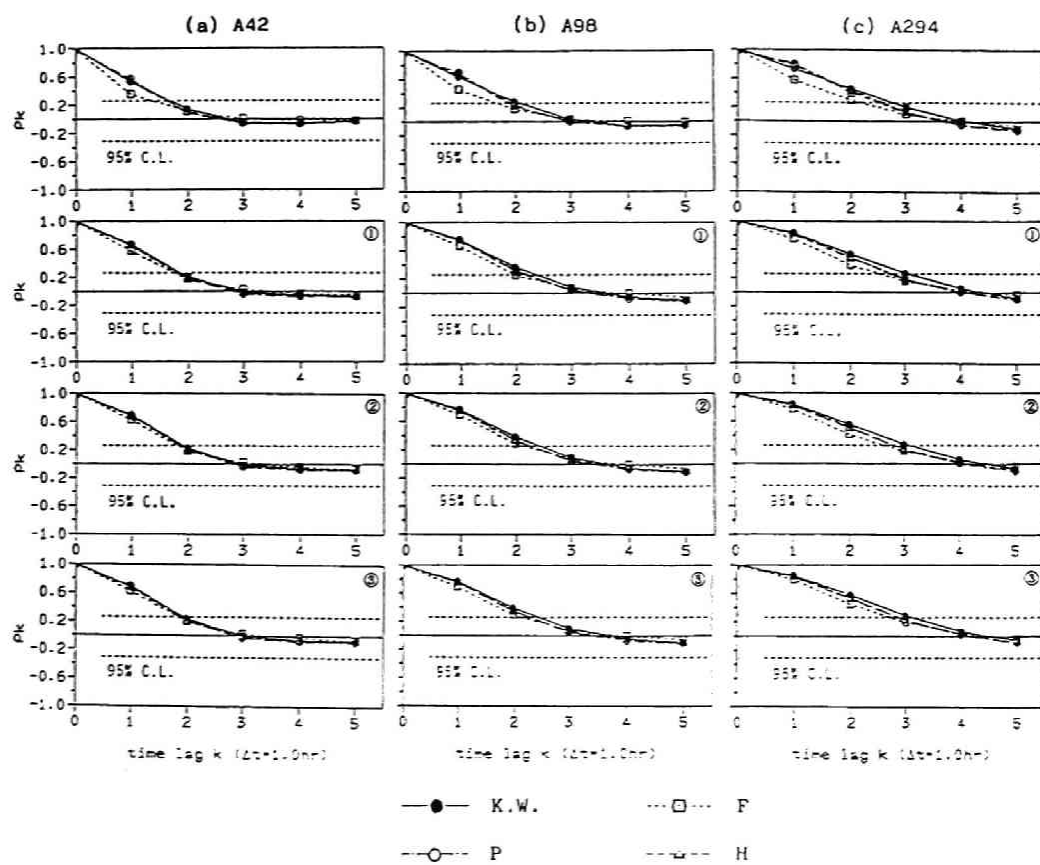


図 2.11: 斜面+河道系の出力残差系列のコレログラム

表 2.8: 出力残差の統計量

σ_e	Model	A 42			A 98			A 294		
		I	II	III	I	II	III	I	II	III
4	K. W.	-0.2504† 1.9330*	-0.2427 1.8830	-0.2455 1.8778	-0.2407 1.7119	-0.2383 1.6882	-0.2410 1.6816	-0.2334 1.4876	-0.2330 1.4744	-0.2410 1.4617
	F	-0.2439 1.9141	-0.2320 1.8415	-0.2371 1.8403	-0.2268 1.7051	-0.2252 1.6739	-0.2251 1.6603	-0.2034 1.5015	-0.2028 1.4801	-0.2010 1.4580
	P	-0.2449 1.9711	-0.2355 1.9194	-0.2408 1.9151	-0.2303 1.7674	-0.2289 1.7449	-0.2288 1.7305	-0.2124 1.5579	-0.2120 1.5408	-0.2108 1.5236
	H	-0.2319 1.9600	-0.2251 1.9080	-0.2269 1.9001	-0.2198 1.7595	-0.2163 1.7313	-0.2199 1.7221	-0.2112 1.5502	-0.2106 1.5322	-0.2106 1.5146
8	K. W.	-0.8906 3.7234	-0.8692 3.6031	-0.8664 3.5783	-0.8628 3.2961	-0.8567 3.2483	-0.8612 3.2303	-0.8452 2.8748	-0.8436 2.8475	-0.8432 2.8232
	F	-0.8902 3.6852	-0.8694 3.5329	-0.8608 3.5028	-0.8572 3.2785	-0.8424 3.1989	-0.8588 3.1920	-0.8144 2.8731	-0.8147 2.8297	-0.8147 2.7941
	P	-0.8232 3.7626	-0.8072 3.6627	-0.8051 3.6354	-0.8231 3.3908	-0.8146 3.3407	-0.8214 3.3187	-0.8066 2.9913	-0.8043 2.9559	-0.8048 2.9274
	H	-0.8609 3.7799	-0.8339 3.6482	-0.8321 3.6234	-0.8226 3.3766	-0.8198 3.3268	-0.8209 3.2968	-0.8105 2.9872	-0.8094 2.9534	-0.8078 2.9180

† denotes the mean and * the standard deviation.

レーションを実行した。

各流域、各基準地点において得られた残差系列の統計量(平均値と標準偏差)を $\bar{\tau} = 8\text{mm/hr}$ の三角形降雨の場合について表 2.8 に示した。同じ条件で $\sigma_e = 4\text{mm/hr}$ の場合のコレログラムは、図 2.11 の中に示してある。

図 2.11 を見ると、斜面末端の出力のコレログラム(いちばん上の図)は、モデル F が kinematic wave の結果と少し異なっている⁵ が、河道を経過するにつれて大体似たような挙動を示すようになる。表 2.8 を見ると、kinematic wave モデルの出力の変動に近い結果を与えているのは、若干ではあるが、モデル P や H よりむしろモデル F の方である。したがって、ここで想定したような斜面+河道系で流量算定の時間間隔を 1hr とした場合、斜面系の簡略化モデルとして、最も簡単なモデル F を用いても差し支えないと言えよう。ただし、この結果は、斜面+河道系の場合にいつも適用できるのではない。この点について次節においてさらなる検討を加えてみよう。

2.6.7 流量算定時間間隔と降雨継続時間について

前項 2.6.6 では、流量算定時間間隔 $\Delta t = 1\text{hr}$ 、降雨継続時間 40hr とした。A42, A98, A294 の各流域の斜面の洪水到達時間は $\bar{\tau} = 8\text{mm/hr}$ のときそれぞれ 2.99hr, 3.86hr, 5.36hr であった。表 2.6 から、 $\Delta t = 1\text{hr}$ をそれらの値で除して無次元化すると、 $\Delta T = 0.334, 0.259, 0.187$ となる。無次元化された降雨継続時間は、 $T_r = 40\Delta T = 13.4, 10.4, 7.5$ となる。一方、2.5 では、 $\Delta T = 0.05, T_r = 2$ であった。すなわち、取り扱った状況が異なる。

そこで、本章では、想定した斜面+河道系の条件はそのままにして、流量算定時間間隔と降雨継続時間を 2.5 と同様に $\Delta T = 0.05, T_r = 2$ としてみよう。A42, A98, A294 の各流域において $\Delta t = 0.150\text{hr}, 0.193\text{hr}, 0.268\text{hr}$ 、降雨継続時間を 5.98hr, 7.72hr, 10.72hr とそれぞれ置き直すのである($\bar{\tau} = 8\text{mm/hr}$ の場合)。このような条件のもとでのシミュレーションの結果を表 2.9 に示す。これは、2.6.6 の表 2.8 に対応するものである。

表 2.9 によれば、斜面系を kinematic wave モデルで置いた場合の各流域・各基準点の流量の変動をよく保存するのはモデル H である。また、モデル F は他のモデルに比べて劣る。これは 2.5 の結果と一致する。

したがって、2.5 や 2.6.7 のように降雨継続時間の比較的短い場合、すなわち、全洪水期間に対してハイドログラフの立ち上がり部や減衰部のウェイトが大きいような場合には、斜面流出モデルの簡略化モデルとして、モデル H が望ましいと言える。

2.6.6 でのような条件においては、河道系からの出力がモデル F でもモデル P や H と大差ないというだけであって、斜面からの出力はやはりモデル F よりもモデル P や H の方が良い。

結局、斜面系の貯留関数モデルとして、基本的にはモデル H が良い。しかしながら、2.6.6 のような条件⁶では、

⁵ ラグ 1 の自己相関係数が小さい。

⁶ ただし、これはかなり現実的な想定である。

表 2.9: 出力残差の統計量

σ_e	Model	A 42			A 98			A 294		
		I	II	III	I	II	III	I	II	III
4	K	-0.1647† 0.8171*	-0.1636 0.8168	-0.1628 0.8181	-0.1643 0.8166	-0.1630 0.8172	-0.1620 0.8185	-0.1637 0.8163	-0.1622 0.8172	-0.1608 0.8179
	F	-0.0215 1.2539	-0.0214 1.2602	-0.0212 1.2636	-0.0215 1.2590	-0.0213 1.2616	-0.0211 1.2648	-0.0214 1.2592	-0.0210 1.2625	-0.0206 1.2651
	P	-0.1221 0.9564	-0.1242 0.9571	-0.1259 0.9584	-0.1229 0.9565	-0.1255 0.9576	-0.1276 0.9590	-0.1242 0.9566	-0.1275 0.9577	-0.1304 0.9587
	H	-0.1560 0.8718	-1.1566 0.8723	-0.1579 0.8734	-0.1562 0.8712	-0.1570 0.8727	-0.1576 0.8739	-0.1565 0.8719	-0.1575 0.8729	-0.1583 0.8736
8	K	-0.6988 1.5646	-0.6958 1.5648	-0.6932 1.5681	-0.6975 1.5640	-0.6938 1.5662	-0.6909 1.5700	-0.6959 1.5639	-0.6913 1.5673	-0.6872 1.5701
	F	-0.5170 1.8382	-0.5148 1.8377	-0.5139 1.8433	-0.5163 1.8366	-0.5144 1.8397	-0.5133 1.8450	-0.5154 1.8358	-0.5133 1.8402	-0.5114 1.8433
	P	-0.6735 1.6634	-0.6740 1.6655	-0.6741 1.6684	-0.6737 1.6639	-0.6741 1.6669	-0.6744 1.6703	-0.6740 1.6647	-0.6745 1.6683	-0.6749 1.6717
	H	-0.6985 1.6510	-0.6973 1.6528	-0.6962 1.6556	-0.6979 1.6514	-0.6963 1.6542	-0.6949 1.6573	-0.6971 1.6522	-0.6949 1.6555	-0.6929 1.6584

† denotes the mean and * the standard deviation.

モデル F を用いても差し支えない。

2.7 斜面流出系の表面流・中間流モデルの比較評価

植生の発達した森林山地などでは、地表面付近は、透水性の高い“A層”と呼ばれる表土層で覆われている(石原・高棹(1962))。地上に降った雨は、このA層にまず浸透するが、A層のすぐ下(鉛直下方)の層は透水性が低いので、側方に浸透流として流れる。この流れは中間流と呼ばれる(たとえば、金子(1957))。このA層の存在と中間流の概念は、斜面流出の特性(表面流発生場の変動、流出の到達時間の遅れ、山腹斜面の保水機能など)を解析する上で非常に重要であり、植生の発達した斜面では無視できない。1960年代初頭に、石原・高棹らはこの中間流を考慮するモデルを初めて提示し、理論的・実証的に詳しく検討した(石原・高棹(1962), 石原・石原・高棹・頼(1962))。

本節では、図2.3(b)のような一定の厚さをもつA層に覆われた斜面流出系を考える。この図で斜面下方にはA層の厚さを超える流れ(表面流)を示しているが、この表面流生起場の大きさは、降雨量の時間変化ともあいまって時間とともに脈動的に変化する。石原・高棹(1962)はこの表面流生起場の変化過程を解析し、これを“occurrence area”と呼んだ(高棹(1963))。この概念は、その後提出された“partial area concept”や“variable source concept”(たとえば、Betson(1964), Dunne and Black(1970))と同等のものであり、水理学的基礎をもつ斜面流出の解析ならではの機構の解明の一つと評価できよう。

図2.3(b)のような斜面系の流出を理想化したモデルとして、kinematic wave モデルを考える。ただし、表面流のみを考慮する通常の(指数法則)kinematic wave モデルと区別するため、表面流と中間流を統合して取り扱うkinematic wave モデルのことを“kinematic source area variation”(KSAV)モデルと呼ぶことにする(Takasao and Takara(1988))。KSAVモデルでは、中間流と表面流を統合した流量流積関係(植葉(1983), Takasao and Shiiba(1988))を用いる。

このKSAVモデルを簡略化したモデルとして、通常のkinematic wave モデル(すなわち、この場合は、実際はA層があるにもかかわらず、その存在に特別な考慮をはらわないで斜面定数にA層の効果を押し込めてしまったモデルとみなすことができる。)と山腹斜面集中化モデル(植葉・高棹・室(1985), Takasao and Takara(1988))を考え、これまでと同じ手順により、これら二つのモデルを確率過程の観点から評価する。

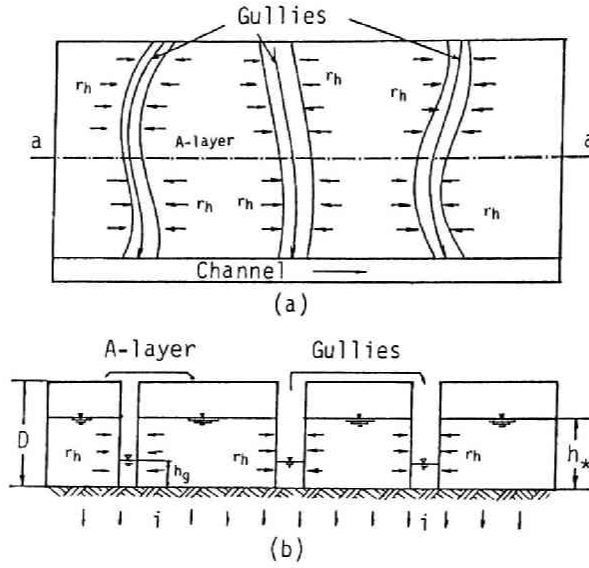


図 2.12: A 層で被覆された山腹斜面の概念図

2.7.1 表面流・中間流を考慮した kinematic wave モデル (KSAV モデル)

図 2.3(b) のように A 層で被覆されている斜面上に部分的に水みち (gully) ができているような場合を考えよう。A 層域と水みち域ではそれぞれ斜面方向に流下するが、A 層域から水みち域への水分の移動も考慮する (図 2.12)。

KSAV モデルを数式表現すると、以下ようになる。

連続式: A 層域については、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = (1 - \lambda)r - r_h \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.36)$$

ここに、 r は有効降雨強度、 λ は水みち面積率 ($0 \leq \lambda \leq 1$)、 x は斜面上流端からの無次元化された距離である ($0 \leq x \leq 1$)。 $h_* \leq D$ のとき $h = \gamma h_*$ 、 $h_* > D$ のとき $h = h_* - (1 - \gamma)D$ (γ は A 層の有効空隙率) で、 r_h は A 層域から水みち域への浸出強度である。水みち域に対しては、

$$\frac{\partial h_g}{\partial t} + \frac{\partial w_g}{\partial x} = \lambda r + r_h \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.37)$$

流量と水深との関係: A 層から水みちへの浸出強度は

$$r_h = \beta h \quad (2.38)$$

ここに、 β は、浸出強度を規定するパラメタである。A 層域上の直接流出 (表面流と中間流の両方を含む) w は、次式で与えられる。

$$\frac{w}{1 - \lambda} = \begin{cases} kh' & (0 \leq h' \leq d) \\ kh' + \alpha_a(h' - d)^m & (d < h') \end{cases} \quad (2.39)$$

ここに、 $h' = h/(1 - \lambda)$ で、 d は有効 A 層厚 ($d = \gamma D$)。水みちでの流量 w_g については、

$$\frac{w_g}{\lambda} = \alpha_g \left(\frac{h_g}{\lambda} \right)^m \quad (2.40)$$

(2.39), (2.40) 式において、 α_a と α_g は次式によって与えられる。

$$\alpha_a = \sqrt{\sin \theta / n_a}; \quad \alpha_g = \sqrt{\sin \theta / n_g} \quad (2.41)$$

ここに、 n_a と n_g は、それぞれ A 層表面と水みちの等価粗度であり、パラメタ

$$\gamma \geq 0, D \geq 0, \alpha_a > 0, m > 1, \alpha_g > 0, k > 0, \beta > 0 \quad (2.42)$$

はすべて定数である。

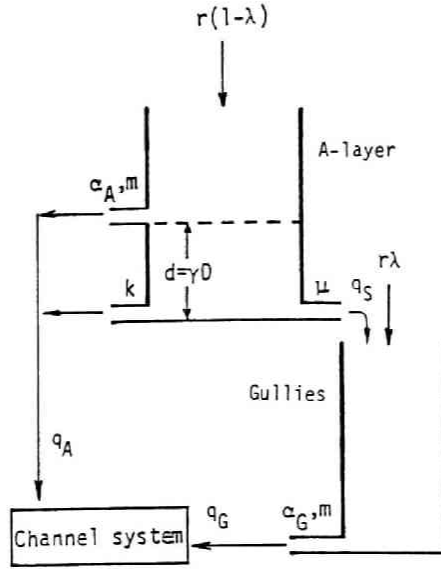


図 2.13: 山腹斜面集中化 (lumped hillslope, LH) モデル

2.7.2 山腹斜面集中化モデル (LH モデル)

KSAV モデルを集中化したものを山腹斜面集中化モデル (lumped hillslope (LH) モデル) と呼ぶことにする。その構造は 図 2.13 のようであり、簡単に説明を加えると以下のようである。

1. 二つのタンクのうち、1 段目のタンクは A 層域を表し、2 段目のタンクは水みち領域を表す。
2. 降雨は各々のタンクにその面積の割合 $(1 - \lambda, \lambda)$ に応じて入力される。ただし、単位面積当りの有効降雨強度はともに r である。
3. 1 段目のタンクの左上方・左下方からの流出はそれぞれ、A 層域から河道への表面流および中間流を表している。 q_A はその総和である。1 段目のタンクの右下方の流出は A 層域から水みちへの流出 q_S である。2 段目のタンクからの流出は水みち域から河道へのものであり、 q_G で表している。

このモデルの数式表現は以下のようになる。

連続式: 上方のタンク (A 層域) については

$$\frac{dh_A}{dt} = r(1 - \lambda) - q_A - q_S \quad (2.43)$$

ここに、 h_A は、上方のタンクの水深、すなわち、A 層域の雨水の平均水深である。下方のタンク (水みち域) については

$$\frac{dh_G}{dt} = r\lambda - q_G + q_S \quad (2.44)$$

ここに、 h_G は、下方のタンクの水深、すなわち、水みち域の雨水の平均水深である。

流量と水深との関係: A 層から水みちへの浸出強度は

$$q_S = \mu h_A \quad (2.45)$$

ここに、 μ は、(2.40) 式中の β に相当する。A 層域からの流出量 q_A は、

$$\frac{q_A}{1 - \lambda} = \begin{cases} kh'_A & (0 < h'_A \leq d) \\ kh'_A + \alpha_A(h'_A - d)^m & (d < h'_A) \end{cases} \quad (2.46)$$

ここに、 $h'_A = h_A / (1 - \lambda)$ である。水みち域からの流出量は

$$\frac{q_G}{\lambda} = \alpha_G \left(\frac{h_G}{\lambda} \right)^m \quad (2.47)$$

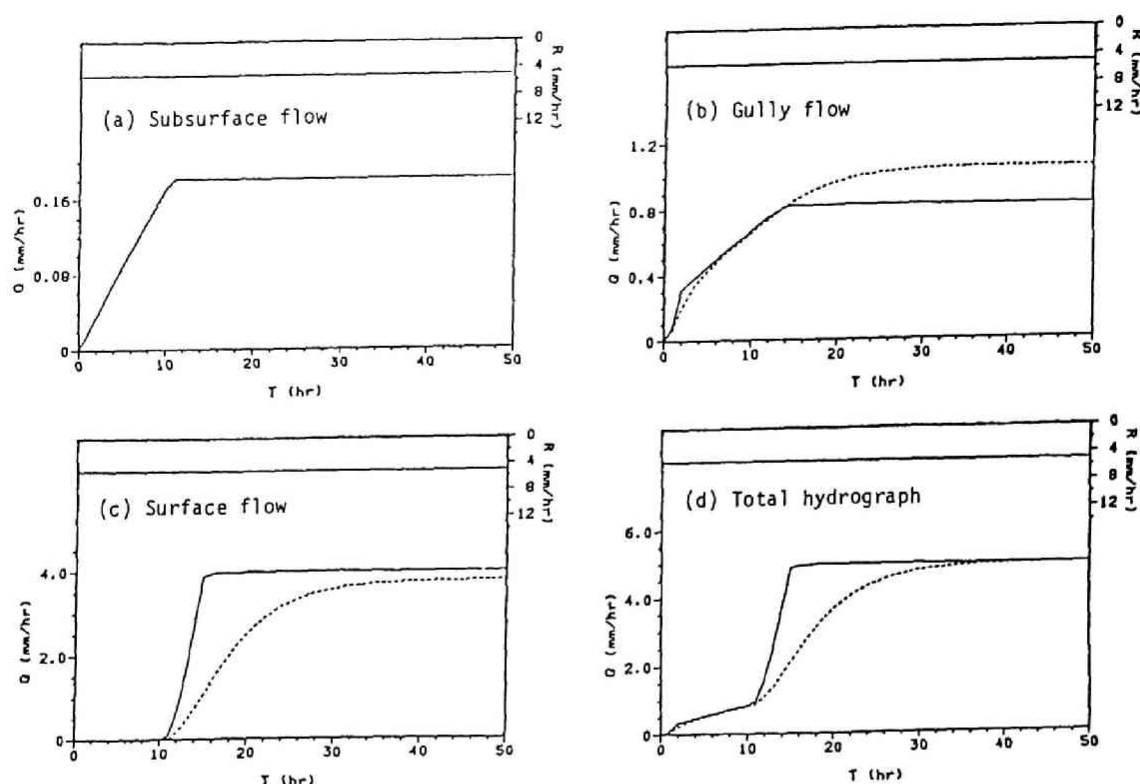


図 2.14: KSAV モデルと LH モデルの各成分ハイドログラフ (LH モデルのパラメタを調整しない場合)

2.7.3 KSAV モデルと LH モデルの関係

KSAV モデルと LH モデルの関係を調べるために、有効降雨強度 r と、二つの山腹斜面パラメタ α_A, d の値を

$$\begin{aligned}\alpha_a &= 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 \quad (\text{mm}^{-2/3}/\text{hr}) \\ d &= 10., 50., 100. \quad (\text{mm}) \\ r &= 5., 10., 20. \quad (\text{mm}/\text{hr})\end{aligned}\tag{2.48}$$

と変えることにより、45 通りの条件のもとで降雨流出シミュレーションを繰り返した。その他のパラメタはその値をすべて以下のように固定した。

$$\begin{aligned}\alpha_g &= 0.107 \quad (\text{mm}^{-2/3}/\text{hr}) \\ k &= 0.00382(\text{hr}^{-1}) \\ m &= 5/3 \\ \gamma &= 0.2 \\ \lambda &= 0.05 \\ \beta &= 0.01 \quad (\text{hr}^{-1})\end{aligned}\tag{2.49}$$

図 2.14 は、 $\alpha_a = \alpha_A, \alpha_g = \alpha_G, \beta = \mu$ として⁷得られたハイドログラフの例である。実線が KSAV モデル、点線が LH モデルによるものである。これらのモデルは、表面流出ハイドログラフ (図 2.14(c)) と総流出ハイドログラフ (図 2.14(d)) において一致が見られない。また、LH モデルの水みち域からの流出が KSAV モデルのそれよりも、定常状態に達したのちは大きくなっている。こうした傾向は、 $\alpha_a = \alpha_A, \alpha_g = \alpha_G, \beta = \mu$ とした場合にすべてのケースに見られる。

そこで、各成分ハイドログラフがよく一致するような α_a と α_A, α_g と α_G, β と μ の関係を、数値実験により試行錯誤

⁷ α_a, α_g はともに斜面長で規準化されている。

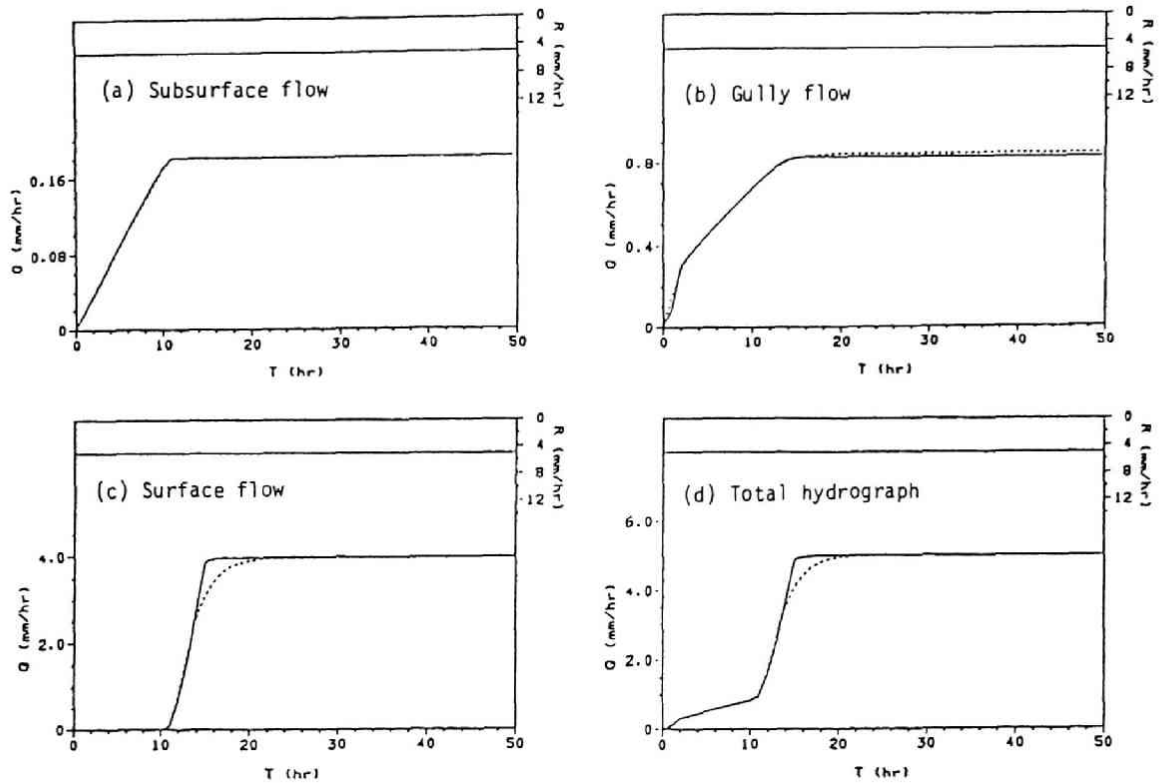


図 2.15: KSAV モデルと LH モデルの各成分ハイドログラフ (LH モデルのパラメタを調整した場合)

誤的に求めた。(2.49) 式で与えられた条件に対して、次のような関係を見出した。

$$\alpha_A = \begin{cases} 3\alpha_a & (d = 100\text{mm}, r = 5\text{mm/hr のとき}) \\ 2\alpha_a & (\text{その他のとき}) \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\alpha_G = 3\alpha_g \quad (2.51)$$

$$\beta = \mu \quad (2.52)$$

これらの関係を使って、図 2.15 に見られるような良好なハイドログラフの一致を得た。

(2.50) 式と (2.51) 式の関係は、試行錯誤により見いだされたものではあるけれども、以下の説明がそれらの関係をある程度説明しうる。(2.11)~(2.13) 式におけるような kinematic wave モデルを考えよう。斜面上の雨水貯留量 $S(T)$ は、

$$S(T) = \int_0^1 H(X, T) dX \quad (2.53)$$

で与えられる。定常状態における関係式

$$S(T) = \frac{m}{m+1} W(1, T)^{1/m} \quad (2.54)$$

はよく知られており、斜面長が 1 であるから、 $S(T)$ は斜面上の平均貯留水深 (すなわち、集中化モデルの水深 H_L) にほかならない。(2.12) 式より、

$$W(1, T) = H(1, T)^m \quad (2.55)$$

であり、(2.54) と (2.55) 式より、

$$H_L = \frac{m}{m+1} H(1, T) \quad (2.56)$$

h_L と h を H_L と $H(1, T)$ の有次元の値とすれば、

$$h_L = \frac{m}{m+1} h \quad (2.57)$$

表 2.10: KW モデルの α の値

d (mm)	\bar{r} (mm/hr)		
	5	10	20
10	0.758	0.860	0.952
50	0.202	0.285	0.361
100	0.090	0.145	0.211

したがって、集中化モデルによる流出 q_L は

$$q_L = \alpha_L h_L^m = \alpha_L \left(\frac{m}{m+1} \right)^m h^m \quad (2.58)$$

kinematic wave モデルの場合

$$q = \alpha h^m \quad (2.59)$$

であり、 $q = q_L$ とするならば、

$$\alpha_L = \left(\frac{m}{m+1} \right)^m \alpha \quad (2.60)$$

$m = 5/3$ を代入すると、

$$\alpha_L = 2.19\alpha \quad (2.61)$$

これは、(2.50)、(2.51) 式の関係が合理的であることを示している。ただし、それらの関係が、(2.49) 式以外の斜面条件のときに直ちに適用できるかどうかは保証の限りでない。

2.7.4 KSAV モデルの代用としての kinematic wave (KW) モデル

A 層で覆われているような斜面であっても、通常の kinematic wave (KW) モデルが代用されることがよくある。KSAV モデルがこのような斜面の流出を完全に記述できると仮定して、いくつかの降雨条件・斜面条件に対して、通常の KW モデルがどのようなパラメタをとるか、シミュレーションにより調べた。

平均有効降雨強度 $\bar{r} = 5, 10, 20$ mm/hr、みかけの A 層厚 $d = 10, 50, 100$ mm に対して、指数 $m = 5/3$ (Manning 流れを想定) の場合、もう一つのパラメタ α の値を同定した結果、表 2.10 のようになった。次項では、この表の関係をを用いる KW モデルと、2.7.3 の関係をを用いる LH モデルとを確率過程的観点から比較する。

2.7.5 確率過程的シミュレーション

2.5 の表面流出斜面の場合の無次元領域での解析と異なり、ここでは、有次元領域で降雨流出シミュレーションを行う。

降雨強度は $t = 1$ hr ごとに変動しその時間間隔内では一定値をとるものとする。洪水期間 $t_f = 80$ hr に対し、降雨継続時間 $t_r = 40$ hr で、平均有効降雨強度は、 $\bar{r} = 5, 10, 20$ mm/hr とする。降雨パターンは、矩形降雨と中央ピーク型の三角形降雨の二通りとし、1 hr ごとに付加される降雨変動の標準偏差 σ_e は、 $0.5\bar{r}$ と $1.0\bar{r}$ とする。

理想化モデルとみなされる KSAV モデルのパラメタは、(2.49) 式の値および $\alpha_a = 0.0107$ に固定した。A 層厚 $d = 10, 50, 100$ mm の三通りを考慮し、A 層厚がこうした斜面の確率変換特性に与える影響をも調べることにした。簡略化モデルである LH モデルの定数 α_G と α_S は、(2.51)、(2.54) 式の関係によって与えられるものとし、KW モデルの定数 α は 表 2.10 の結果にしたがって定められるものとする。

2.7.6 LH モデルと KW モデルの比較評価

上記の条件のもとで、平均的降雨を与えて KSAV モデルにより流出計算 (システムからの出力の平均的挙動の計算) を行う。次に、LH モデルと KW モデルにより確率変動する入力降雨のもとでの流出計算を行う。先に求めておいた平均的出力と簡略化モデルによる出力との差 (残差) を得る。LH モデルと KW モデルの比較のための

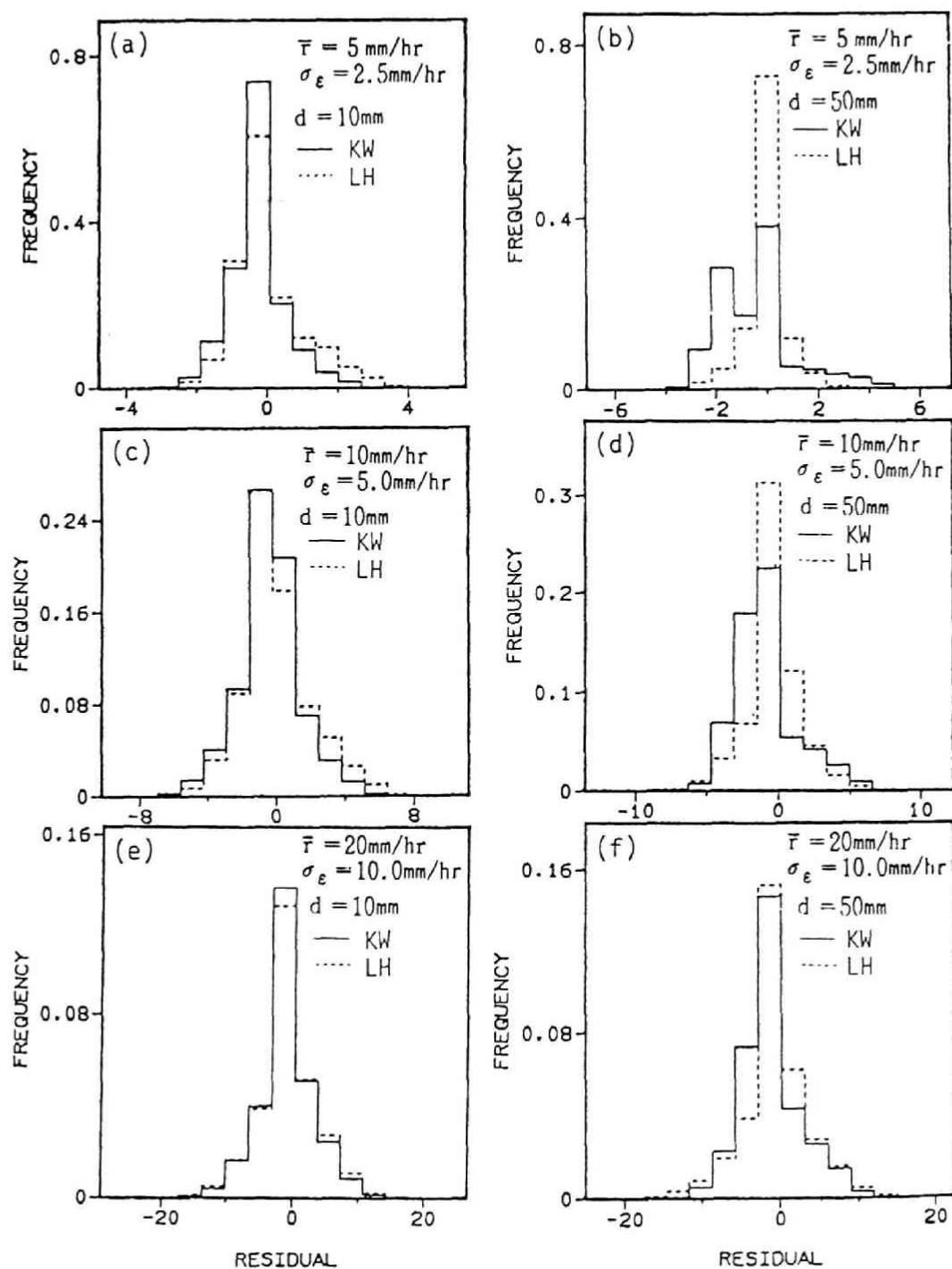


図 2.16: 出力残差のヒストグラムによる KW モデルと LH モデルの比較

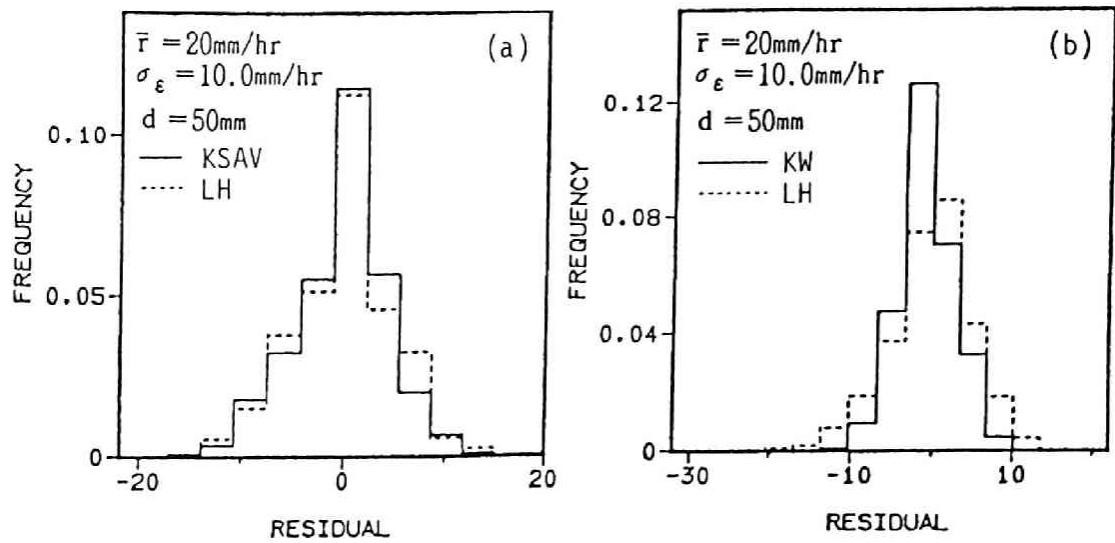


図 2.17: 出力残差による KSAV, KW, LH モデルの比較 (矩形降雨の場合; シミュレーション回数 (a)10 回 (b)100 回)

表 2.11: 出力残差の統計量

	(a)		(b)	
モデル	$\bar{\delta}$	σ_{δ}	$\bar{\delta}$	σ_{δ}
KSAV	—	—	-0.1211	4.498
KW	-0.7589	3.540	—	—
LH	-0.1933	5.136	-0.0115	4.772

シミュレーションは、それぞれの条件のもとで 100 回ずつ繰り返す。数値計算は、LH モデルに対しては、Runge-Kutta-Gill 法、KSAV モデルに対しては Lax-Wendroff 型の差分スキーム (椎葉 (1983)) によった。こうして得た出力残差のヒストグラムを図 2.16 に示す (三角形降雨の場合)。

図 2.16 は、A 層が薄くて降雨が強いとき、LH と KW の残差のヒストグラムが似てくる (図 2.16(a)) ことを示す。このことは、直観的にも分かりやすい結果であり、こうした状況でも LH モデルが有用であることを示している。逆に、図 2.16(b) に示すように、A 層が厚くて雨が強いときには、ヒストグラムが大きく異なる。この場合には、直接流出のうち中間流出が卓越するのであり、KW モデルではこうした状況を表現できないことを示している。すなわち、KW モデルの出力は、理想的な KSAV モデルの出力からかなりずれてくるのである。LH モデルの場合このずれはそれに比べて小さくなる。

図 2.17(a) には、KSAV モデルと LH モデルの残差ヒストグラムの比較が示されている。この比較のために行ったシミュレーションの回数は 10 回だけである。というのは、KSAV モデルの計算に CPU 時間がかかりかかるからである。図 2.17(a) のヒストグラムはよく似ていると言える。一方、図 2.17(b) は、LH モデルと KW モデルの比較であり、KW モデルのヒストグラムが LH モデルのそれよりも広い範囲に広がっていることが見て取れる。この図に対する残差の平均値と標準偏差を表 2.11 に示す。

また、図 2.17、表 2.11 と同じ条件のもとでのハイドログラフの一例を図 2.18 に示す。

これらの結果から、KSAV モデルの簡略化モデルとしては、LH モデルの方が KW モデルよりも優れていると言える。すなわち、A 層をもつような (中間流出成分を考慮すべき) 斜面系では、表面流のみを扱うモデルではなく、LH モデルのような中間流出成分を陽に組み込んだモデルを用いる必要がある。A 層厚が薄く降雨強度が大きいような状況 (図 2.16(e) のような) では、KW モデルでもある程度代用することができるが、中間流成分の効果が大きい状況で KW モデルを用いるとは計算結果に歪を生じてくることになるのである。LH モデルのもう一つの利点は、計算時間の有利さである。著者の経験では、KSAV モデルを差分スキームで解いた場合の百分の 1 以下のスピードで計算できる。したがって、A 層に覆われた斜面を多数もつような流域における流出計算の有用な道具と

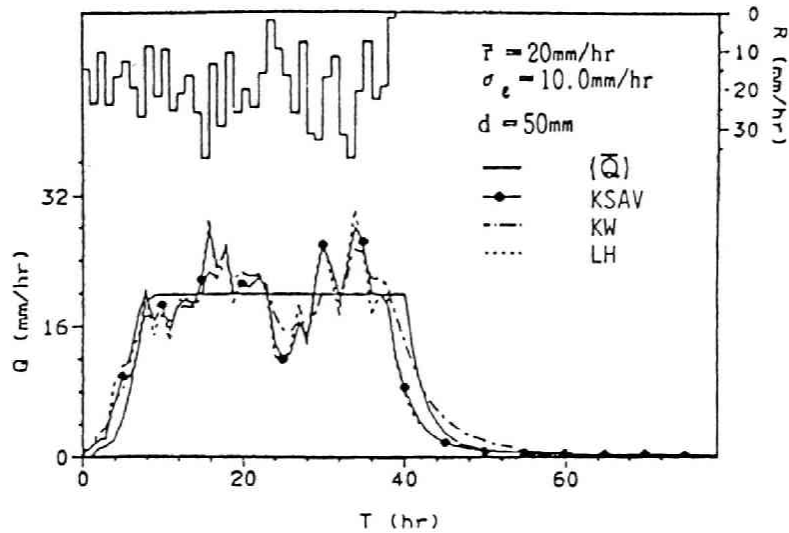


図 2.18: 確率変動入力の場合のハイドログラフ (表面流・中間流モデル)

なり得るものと思われる。LH モデルのパラメタと物理的基礎をもつ KSAV モデルのパラメタとの対応関係を、ある限られた条件のもとで明らかにした (2.7.3) が、別の条件下での関係をも明らかにしてその実用化に努めることが今後に残された課題である。

2.8 結 語

洪水流出現象が stochastic な物理現象であるという観点から、洪水流出モデルの評価の手順とその適用例を示した。

まず、表面流のみを考慮した矩形斜面を想定し、斜面流出系、斜面+河道流出系において、系内に存在する確率変動成分が降雨の時間変動だけの場合の系の出力の確率変動 (系の確率変換特性) を数値実験により明らかにした。斜面系の理想化モデルである kinematic wave (KW) モデルを簡略化したものとして三つの貯留関数型モデルを取り上げ、確率過程的観点からの評価を行った。

次に、表面流だけでなく、中間流をも考慮すべき斜面系での理想化モデルとして、石原・高棹のモデル (KSAV モデルと称した) を用い、それを簡略化したモデルとして山腹斜面集中化モデル (LH モデル) を提案し、確率過程的観点から LH モデルと KW モデルの比較を行った。中間流出を考慮すべき斜面系での LH モデルの有用性が明らかにされた。

こうした観点からの流出モデルの評価の考え方は未だ緒についたばかりであり、以下のような点を明らかにしてゆきながら、より良い流出モデルの構築を図ってゆく必要があろう。

1. 均質とみなしてよい場・入力の時間的空間的スケール
2. 場・入力・初期条件がもつ確率統計的特性
3. 入出力データに含まれる種々の不確定要因の定量化

参 考 文 献

Betson, R.P. (1964): What is Watershed Runoff? Journal of Geophys. Research, Vo. 69, No. 8, pp. 1541-1552.

- Dunne, T. and R.D. Black (1970): Partial Area Contributions to Stream Runoff in a Small New England Watershed, Water Resources Research, Vol. 6, pp. 1296-1311.
- Eagleson, P.S. (1970): Dynamic Hydrology, McGraw-Hill, 462pp.
- 藤田睦博 (1980): 斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 314 号, pp. 75-86.
- Fujita, M., T. Michiguchi and M. Yamaoka (1980): Stochastic Response in a nonlinear runoff system, Proc. of the Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, Tokyo, Japan, pp. 117-128.
- 星 清・山岡 勳 (1982): 雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第 26 回水理講演会論文集, pp. 273-278.
- 石原藤次郎・石原安雄・高棹琢馬・頼 千元 (1962): 由良川の出水特性に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第 5 号 A, pp. 147-173.
- 石原藤次郎・高棹琢馬 (1959): 単位図法とその適用に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第 60 号 別冊 (3-3), 34 pp.
- 石原藤次郎・高棹琢馬 (1962): 中間流出現象とそれが流出過程におよぼす影響について, 土木学会論文集, 第 79 号, pp. 15-23.
- Iwagaki, Y. (1955): Fundamental Studies on the Runoff Analysis by Characteristics, Bull. Disaster Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No. 10, pp. 1-25.
- 岩垣雄一・末石富太郎 (1954): 横から一様な流入のある開水路の不定流について — 雨水の流出現象に関する水理学的研究 (第 1 報) —, 土木学会誌, 第 39 巻, 第 11 号, pp. 575-583.
- 岩垣雄一・高棹琢馬 (1956): 降雨および流域特性が流出関係に及ぼす効果について, 京都大学防災研究所創立 5 周年記念論文集, pp. 191-200.
- 金子 良 (1957): 農業水文学, 土木雑誌社, 295pp.
- 木村俊晃 (1961, 1962): 土木技術資料, 3-12, 4-1, 4-4, 4-5 4-6, 4-7.
- 楠橋康広・高棹琢馬・宝 馨 (1985): 斜面流出系の表面流・中間流モデルに関する確率過程的検討, 土木学会第 40 回年次学術講演会講演概要第 2 部, II-30, pp. 59-60.
- Lighthill, M.J. and G.B. Whitham (1955): On Kinematic Waves, 1. Flood Movement in Long Rivers, Proc. R. Soc. London, Ser. A, Vol. 229, pp.281-316.
- Prasad, R. (1967): A Nonlinear Hydrologic System Response Model, Proc. ASCE, Vol. 93, HY4, pp. 201-221.
- 椎葉充晴 (1983): 流出系のモデル化と予測に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 170pp.
- Singh, V.P. (1975): Hybrid Formulation of Kinematic Wave Models of watershed Runoff, Journal of Hydrology, Vol. 27, pp. 33-50.
- 末石富太郎 (1955): 特性曲線法による出水解析について — 雨水の流出現象に関する水理学的研究 (第 2 報) —, 土木学会論文集, 第 29 号, pp. 74-87.
- Takara, K. and T. Takasao (1985): A New Attempt to Evaluate Rainfall-Runoff Models from the Viewpoint of Stochastic Transformation, Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering, JSCE, Vol. 3, No. 2, pp. 61-72.
- 高棹琢馬 (1963): 出水現象の生起場とその変化過程, 京都大学防災研究所年報, 第 6 号, pp. 166-180.
- 高棹琢馬・椎葉充晴 (1976): 河川流域の地形構造を考慮した出水系モデルに関する研究, 土木学会論文報告集, 第 248 号, pp. 69-82.

- 高棹琢馬・池淵周一・椎葉充晴 (1977): 河道網構造を考慮した河川流域の出水解析法に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第 20 号 B-2, pp. 185-199.
- 高棹琢馬・椎葉充晴 (1979): Kinematic Wave 法に基づく流出計算法の総合化について, 京都大学防災研究所年報, 第 22 号 B-2, pp. 225-236.
- 高棹琢馬・椎葉充晴 (1980): 状態空間法による流出予測 —kinematic wave 法を中心として—, 京都大学防災研究所年報, 第 23 号 B-2, pp. 211-226.
- 高棹琢馬・椎葉充晴 (1981): Kinematic Wave 法への集水効果効果の導入, 京都大学防災研究所年報, 第 24 号 B-2, pp. 159-170.
- Takasao, T. and M. Shiiba (1988): Incorporation of the Effect of Concentration of Flow into the Kinematic Wave Equations and Its Applications to Runoff System Lumping, Journal of Hydrology, Vol. 102, pp. 301-322.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1982): 流域地形効果を導入した雨水流モデル, 水資源研究センター研究報告, 京都大学防災研究所, 第 2 号, pp. 23-29.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1984): 流出モデル評価への情報量規準の導入について, 京都大学防災研究所年報, 第 27 号 B-2, pp. 275-290.
- Takasao, T. and K. Takara (1988): Evaluation of Rainfall-Runoff Models from the Stochastic Viewpoint, Journal of Hydrology, Vol. 102, pp. 381-406.
- 高棹琢馬・宝 馨・楠橋康広 (1985): 洪水流出モデルの確率過程的評価に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第 28 号 B-2, pp. 221-235.
- 上田年比古 (1961): 降雨流出に関する基礎的研究, 九州大学学位論文, 311pp.
- Wooding, R.A. (1965a): A Hydraulic Model for the Catchment-Stream Problem, 1. Kinematic Wave Theory, Journal of Hydrology, Vol. 3, pp.254-267.
- Wooding, R.A. (1965b): A Hydraulic Model for the Catchment-Stream Problem, 2. Numerical Solutions, Journal of Hydrology, Vol. 3, pp. 268-282.
- Wooding, R.A. (1966): A Hydraulic Model for the Catchment-Stream Problem, 3. Comparison with Runoff Observations, Journal of hydrology, Vol. 4, pp. 21-37.
- Woolhiser, D.A. and J.A. Liggett (1967): Unsteady, One Dimensional Flow over a Plane—The Rising Hydrograph, Water Resources Research, Vol.3, No. 3, pp.753-771.

第3章

洪水流出のリアルタイム予測の確率過程的手法

洪水予報は、洪水災害の防止・軽減を目的とするものであり、豪雨出水現象が進行するさなかに、その現象をリアルタイムで観測・予測し、予報文の作成・伝達するという一連の作業からなる。洪水流出のリアルタイム予測においては、(1) 時々刻々得られるデータを活用すること、(2) それに基づいて迅速に予測計算を行い予報に有用なデータを導出することが要点である。

今日のわが国の洪水予報システムの現状はというと、毎時の観測データは無線やその他のオンラインシステムにより直ちに入手できる仕組みになっている。主要河川流域では、高性能のコンピュータが導入されており、迅速な計算が可能となっている。

近年の通信・情報処理の分野における技術革新によるそのような周辺システムの日々の充実は、しかしながら、高々ここ10年程度のものである。雨量予測や流出計算モデルそのものは旧態依然たる状況であり改善の余地がある。すなわち、流出予測計算は、確定的な降雨予測に基づく確定的な流量予測の域を脱しておらず、予報の方も、一般に対しては洪水注意報・洪水警報の2段階予報がなされているのみである。住民が有機的に対応できるようなきめ細かな予報が理想であるが、現状ではそのような見方からすれば不十分であると言える¹。したがって、われわれとしては、豪雨・洪水災害防止のために、より有用なきめ細かな予報を実現させる方策を考案し、実際の場面に供してゆきたいと考えるのである。

本章では、洪水予報の新しいあり方の確立を目的として、確率過程の状態空間型洪水流出モデルに Kalman フィルタ理論を応用したリアルタイム洪水予測手法を提示し、実流域への適用によりその有用性を検証する。

3.1 洪水流出のリアルタイム予測に関する従来の研究

洪水流出のリアルタイム予測の重要性は以前から認識されていて多数の文献がある。最近の研究動向としては、Kalman に始まるフィルタリング・予測理論を適用する手法が主流となっている。これは、日野 (1973, 1974) が流出系に Kalman フィルタを導入して以来、そのアルゴリズムがコンピュータを利用したオンライン計算に適していることもあって、この10年余りの間に国内外で多くの研究がなされてきたものである (たとえば、Chiu (1978), 高棹・椎葉 (1979, 1980), Wood (1980), 星ら (1981, 1988), 砂田 (1982), 高棹・椎葉・宝 (1982, 1983, 1989), 日野・金 (1984), 角屋・田中丸ら (1988, 1989), 白木ら (1988) など)。

初期の頃のそれらの研究の多くでは、リアルタイム予測 (実時間予測あるいはオンライン予測) を取り扱っているには違いないが、専ら計算手法に論点を置いていたり、予測値の確率分布が計算結果として得られるという利点を軽んじていたりするものが多い。そのため、降雨予測については、簡略な取り扱いがなされていて、たとえば、決定論的な値が与えられたり、完全に予測できると仮定されたりしている。出力 (河川流量あるいは水位) の確率予測を意識する場合には、基本的には入力 (降雨) 予測も確率的に取り扱うべきである。対象流域については、単一流域を想定することが多いが、広い範囲での洪水予報を意識すれば複数の分割流域をもつ流域 (ここでは“複合流域”と呼んでおく) における洪水流出のリアルタイム予測も考慮しておく必要がある。また、フィルタリング・予測理論を適用する際に最も問題となるのはノイズ項の統計量である。これに関する記述が極めて曖昧な論文も散見されるが、予測精度に大きく関連するものであるからその取扱いは明確にしておく必要がある。

¹最近になって、(財) 河川情報センターが設立され、リアルタイムでの降雨実況、河川流量実況が全国の地方自治体等にも配信されるようになった。今後、実況のみならず、予測情報の提供についても検討されつつあるようである。

3.2 降雨予測について

洪水流量のリアルタイム予測において、予測時間（リードタイム）は少なくとも2～3時間が望ましく、したがって、その間の降雨予測が必要である。降雨の短時間予測手法（洪水流出予測に適用可能なもの）は開発途上にある。建設省の現行の洪水予報業務では、前3時間移動平均法（過去3時間の面積平均雨量を平均し、それを定数倍して今後数時間の予測降雨とする）が用いられる（高棹・永末（1982）、木下（1982））。この方法は、従来の業務において特別な不都合を生じなかったこと、簡便であることなどから多用されてきた。現状では実際的な手法であるとしてよい。ただ、この場合でも降雨予測の精度（統計的な不確定性）を定量的に把握しておく必要がある。当該流域の過去の時間雨量系列を用いて、この方法で生じる予測誤差系列を統計処理することにより、予測誤差の分散、リードタイムごとの予測誤差相互の共分散を単純に求めることができるので、それらの情報も降雨予測に取り込むべきであると考えられる。

近年、レーダー雨量計の設置によって降雨の実況が面的に把握できるようになり、目下、観測精度の定量的評価の研究が進められている。この新しい観測方法とそのデータを活用することによる降雨の短時間予測手法（たとえば、椎葉（1988））や洪水予測精度（高棹・宝ら（1988, 1989））についても検討され始めており、今後の発展が期待される。

3.3 洪水流出のリアルタイム予測の手法

3.3.1 状態空間型流出モデルとその確率過程的取り扱い

洪水流出予測に用いるモデルは、降雨流出現象の物理性を考慮したものがよい。ただし、予測システムの計算能力を考えると、極端に複雑・精密な流出モデルは不適当であって、適切に集中化されたモデルが望ましい。

既存の流出モデルのほとんどは、次式のように状態空間表示することができる。

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x, c, r(t)) \quad (3.1)$$

$$y(t) = g(x(t), c) \quad (3.2)$$

ここに、 x は状態ベクトル、 r は入力ベクトル、 y は出力ベクトル、 c はパラメタベクトルである。 t は時間を表し、 f, g は一般に非線形のベクトル値関数である。

さて、通常の流出予測計算は、次のような手順で行われる。

Step 1) 採用するモデルの選定（ f, g の関数形の決定）。

Step 2) モデルパラメタの決定（いわゆる定数解析；既存の雨量・流量データなどからパラメタ c を決める）。

Step 3) 初期状態 $x(t_k)$ を与える（ t_k ：初期時刻または現在時刻）。

Step 4) 予測雨量を確定的に与えて、微分方程式（3.1）を $t \geq t_k$ において解き、対象とする将来時点 t_{k+i} （ $i = 1, 2, \dots; t_k < t_{k+1} < \dots$ ）の状態 $x(t_{k+i})$ を求める。

Step 5) (3.2) 式により、 $x(t_{k+i})$ を流量 $y(t_{k+i})$ に変換する。

リアルタイム洪水予測は、Step 3～Step 5 をある時間間隔ごとに（たとえば、流量の観測ごとに）繰り返すこととなるが、場合によっては、観測されたばかりの雨量・流量データを用いて、モデルパラメタ c の値を変更したのち Step 3～Step 5 を実行する（すなわち、Step 2～Step 5 を繰り返してゆく）こともある。上記の手順は、確定的な入力（雨量）予測に基づく確定的な出力予測である。言わば決定論的（deterministic）な取り扱いであり、得られた結果の確からしさを明示するものではない。

そこで、降雨流出現象および観測の不確定性、モデル化（システム記述）の不正確さを考慮し、また、観測が離散時間でなされることも考慮して、(3.1)、(3.2) 式を次のように確率過程的（stochastic）に取り扱う。これから述べる方法は、こうした定式化が基本となる。

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), c, r_k) + Fw(t), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k \quad (3.3)$$

$$y_k = g(x_k, c) + Gv_k \quad (3.4)$$

ここに、 r_k は $t_{k-1} \leq t_k$ における平均降雨強度、 y_k および x_k は時刻 t_k における出力および状態であり、 $w(t)$ 、 v_k はそれぞれシステムノイズベクトル、観測ノイズベクトルで、 F, G は係数行列である。(3.3)、(3.4) 式は確率微分方程式であって、 x, y, w, v は確率変数として取り扱うことになる。

これから述べる方法は、こうした確率過程の状態空間モデルを基本として、時々刻々入手される雨量・流量データを活用しながら、予測値だけでなくその精度をも定量的に与えようとするものである。

3.3.2 確率過程の状態空間モデルと Kalman フィルタ

時間とともに状態が変化するいわゆる動的システムは、システムの状態を表す p 個の変数 (状態変数) からなるベクトル (状態ベクトル) を用いて

$$x_{k+1} = \Phi(k+1, k)x_k + \Gamma(k)w_k \quad (3.5)$$

$$y_k = H(k)x_k + G(k)v_k \quad (3.6)$$

のような形式で表示できる (ただし、線形離散の場合)。ここに、 x_k は時刻 t_k での状態ベクトル ($p \times 1$ 次元)、 $\Phi(k+1, k)$ は状態推移行列 ($p \times p$)、 y_k は時刻 t_k でのシステムの出力 (観測値) を表す q 個の変数からなる観測ベクトル ($q \times 1$)、 w_k はシステムノイズベクトル ($r \times 1$)、 v_k は観測ノイズベクトル ($s \times 1$) で、 $\Gamma(k), H(k), G(k)$ は係数行列 (それぞれ $p \times r, q \times p, q \times s$) である。(3.5) 式は時刻 t_k から t_{k+1} の間の状態の推移を表す式で状態方程式、(3.6) 式はシステムの状態を観測する形態を示すもので観測方程式と呼ばれる。(3.5)、(3.6) 式は線形離散型の状態空間モデルであり、より一般的には、(3.3)、(3.4) 式の非線形連続・離散型のモデル²で流出システムを表現する。

(3.5)、(3.6) 式右辺の第 2 項すなわちノイズ項には何らかの確率特性が仮定される。通常、ノイズベクトルは白色正規過程と仮定され、その期待値と共分散行列は以下のように与えられる。

$$E\{w_k\} = 0 \quad (3.7)$$

$$E\{w_k w_j^T\} = Q(k)\delta_{kj} \quad (3.8)$$

$$E\{v_k\} = 0 \quad (3.9)$$

$$E\{v_k v_j^T\} = R(k)\delta_{kj} \quad (3.10)$$

ここに、 E は期待値記号、 δ_{kj} はクロネッカーのデルタで、 $Q(k), R(k)$ はそれぞれ $r \times r, s \times s$ の行列である (T は転置記号)。

Kalman フィルタとは、システムが上のような確率過程の状態空間モデルで表現されるとき、システム出力の新しい観測値が利用可能になるたびにごとに状態ベクトルの推定値を更新する一連の方程式のことである。時刻 t_k まですでに利用可能な観測値を用いて得られる状態ベクトルの最適な推定値を $\hat{x}(k|k)$ 、その共分散行列を $P(k|k)$ 、同じ条件で 1 時間ステップ先の状態ベクトルの最適な推定値を $\hat{x}(k+1|k)$ 、その共分散行列を $P(k+1|k)$ と書くことにすれば、Kalman フィルタのアルゴリズムは次のように要約できる。

(1) 予測更新

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi(k+1|k)\hat{x}(k|k) \quad (3.11)$$

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1|k)P(k|k)\Phi^T(k+1|k) + \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \quad (3.12)$$

(2) Kalman ゲインの計算

$$K(k+1) = P(k+1|k)H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + G(k+1)R(k+1)G^T(k+1)]^{-1} \quad (3.13)$$

(3) 観測更新 (新しい観測値 y_{k+1} を得て推定値を更新する)

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)[y_{k+1} - H(k+1)\hat{x}(k+1|k)] \quad (3.14)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1)H(k+1)]P(k+1|k)[I - K(k+1)H(k+1)]^T + K(k+1)G(k+1)R(k+1)G^T(k+1)K^T(k+1) \quad (3.15)$$

システムが (3.5)、(3.6) 式のような線形離散型の式で表されない場合、Kalman フィルタを直接適用することはできない。このような場合には、非線形フィルタを用いたり、適当な線形化・離散化を施すことにより同様の流出予測のアルゴリズムを構成することができる。これについては、3.5 節以降に述べる。

²状態方程式 (3.3) 式が連続時間で記述され、観測方程式 (3.4) 式が離散時間で記述されている。

表 3.1: フィルタリング・予測理論を適用した洪水流出のリアルタイム予測手法の分類

大分類	パラメタ	ノイズ統計量		わが国における研究例	手法の呼称
状態推定法	固定	定常	固定	高棹・椎葉 (1979)	定常状態推定法 (定常フィルタ)
		非定常	状態量への依存の仕方を固定(乗算的ノイズ)	高棹・椎葉・宝 (1982, 1983)	非適応的状态推定法
			時々刻々推定	高棹・椎葉 (1980)	適応的状态推定法
パラメタ推定法	時々刻々推定	定常	固定	日野 (1973, 1974) 砂田 (1982)	定常パラメタ推定法 (適応フィルタ)
		非定常	時間の関数として固定	西村・室田・江藤 (1977)	非適応的 パラメタ推定法
			時々刻々推定	星・山岡・茂木 (1981)	適応的 パラメタ推定法

3.3.3 状態推定法とパラメタ推定法

水文流出系の予測問題に初めて Kalman フィルタ理論を応用したのは 1970 年代前半の日野 (1973, 1974) であるが、そのアルゴリズムがコンピュータを利用したオンライン計算に適していることにより、前述のように、以後十余年の間に国内外における多数の研究者により Kalman フィルタ理論を適用した流出予測手法が発展させられてきた。理論の適用にあたっては、用いる流出モデルが線形であるか非線形であるか、状態変数に何をとりか、ノイズ項の確率特性をどう考えるかなどに応じて種々の取り扱いがある(宝・高棹・椎葉 (1984))。しかしながら、それらの取り扱いの優劣を比較検討した論文はほとんどないと言ってよい。本論文では、直接的あるいは間接的に観測される物理量を状態変数としてそれを Kalman フィルタによって時々刻々推定・更新しながら流出予測を行っていく方法(これを“状態推定法”(有本 (1977))と呼ぶことにする)と、モデルパラメタを状態変数と読み替えてそれを Kalman フィルタによって時々刻々推定・更新しながら流出予測を行っていく方法(これを“パラメタ推定法”と呼ぶことにする)とを比較検討する。また、そのどちらの方法に対しても、7.3.4 で述べるように、ノイズ項を定常とするか非定常とするか二通りの考え方があるので、どちらが合理的であるかを明らかにする。

3.3.4 ノイズ項の統計量について

さて、状態推定法でもパラメタ推定法でも理論適用時に留意しなければならないのは、システムノイズ、観測ノイズの共分散行列の取り扱いである。毎時のフィルタリングにおいて、それらの値は所与のものでなければならず、また、それらが出力の予測精度に大きく関連するからである。

システムノイズ、観測ノイズの確率特性が定常的であると仮定すれば、ノイズの共分散は洪水期間中一定値とする。しかし、洪水流出は、流量(および状態量)が急激に変動する現象であるから、ノイズの非定常性を考慮するのが合理的である。そこで、一つの考え方として、ノイズの統計量を時々刻々推定してゆく方法がある(高棹・椎葉 (1980), 星・山岡・茂木 (1981))。別の考え方としては、ノイズの共分散が時間の関数であるとしてその関数形を固定する方法(西村・室田・江藤 (1977)), 流量あるいは状態量に依存するとしてその依存の仕方を固定する方法(高棹・椎葉・宝 (1982, 1983), Takara et al. (1983))がある。

これら種々の方法を分類比較したのが表 3.1 である。モデルパラメタとノイズ統計量の取り扱い方によってそれぞれの方法に呼称をつけてみた。たとえば、筆者らの最近の方法は、ノイズを非定常的と考えているが、ノイズの統計量を時々刻々推定するのではないので、“非適応的状态推定法”(non-adaptive state estimation method)と呼ぶ。“定常フィルタ”と呼ばれるものは“定常状態推定法”(steady state estimation method)に属することになる。“適応フィルタ”と呼ばれるものは、“定常パラメタ推定法”に属するが、パラメタ推定法と“適応的状态推定法”(adaptive state estimation method)をひっくるめて適応フィルタと呼ぶことも多いようである。フィルタリング・予測理論を水文系に導入する際、上述のように種々の適用法がある。それらの識別のためには、このような呼称を用いると便利である。

3.4 日流量モデル (線形 SISO システム) への適用

3.4.1 ARMAX モデル

3.3.3 で述べた検討のために、以下のような線形時系列モデルを用いる。

$$y_{k+1} = a_1 y_k + \cdots + a_n y_{k-n+1} + b_1 x_k + \cdots + b_\ell x_{k-\ell+1} + c_1 e_k + \cdots + c_m e_{k-m+1} + e_{k+1} \quad (3.16)$$

ここに、 y_k, x_k, e_k はそれぞれ時刻 t_k におけるシステム出力 (たとえば流量)、システム入力 (たとえば雨量) およびノイズであり、 $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_\ell; c_1, \dots, c_m$ はモデルパラメタである。(3.16) 式は、外生入力をもつ自己回帰移動平均モデル (Auto-Regressive Moving-Average model with eXogenous input ; ARMAX モデル) と呼ばれ、単一入力・単一出力系 (single input and single output (SISO) system) の時系列モデルとしてしばしば用いられる。右辺の初めの n 項は AR-part, 次の ℓ 項は X-part, 次の m 項は MA-part と呼ばれ、各 part の項数を規定する n, m, ℓ によって (3.16) 式を ARMAX(n, m, ℓ) と記すことにする。

3.4.2 ARMAX モデルの状態空間表現

ARMAX モデルは適当な変形によって状態空間表現をすることができる。その際、状態ベクトルに何をとりかによっていくつかの異なる表現形式が得られる。たとえば、 $\mathbf{x}_k = [y_k, \dots, y_{k-n+1}, \dots, e_{k-m+1}]^T$ として

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_k \\ \vdots \\ y_{k-n+2} \\ e_{k+1} \\ e_k \\ \vdots \\ e_{k-m+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n & c_1 \cdots c_m \\ 10 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 010 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & 010 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 010 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_{k-n+1} \\ e_k \\ e_{k-1} \\ \vdots \\ e_{k-m+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_\ell \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \vdots \\ x_{k-\ell+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e_{k+1} \quad (3.17)$$

$$q_k = [10 \cdots 0] \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_{k-n+1} \\ e_k \\ e_{k-1} \\ \vdots \\ e_{k-m+1} \end{bmatrix} + d_k v_k \quad (3.18)$$

ここに、 q_k は観測流量であり、(3.18) 式はノイズ $d_k v_k$ の存在のもとで流量 y_k を観測するシステムを表している。この場合、(3.5)、(3.6) 式との対応は以下になる。ただし、(3.17) 式は (3.5) 式に入力項が付加されているので、Kalman フィルタのアルゴリズムにおいて、たとえば、 $x_k, \dots, x_{k-\ell+1}$ が確定入力であれば、その分を (3.2) 式右辺に加えてやるなどの操作が必要である。

もう一つ別の取り扱いとして、モデルパラメタ $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_\ell$ を状態変数とみなす方法がある。その場合、たとえば

$$\begin{bmatrix} a_1(k+1) \\ \vdots \\ a_n(k+1) \\ b_1(k+1) \\ \vdots \\ b_\ell(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(k) \\ \vdots \\ a_n(k) \\ b_1(k) \\ \vdots \\ b_\ell(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(k+1) \\ \vdots \\ w_n(k+1) \\ w_{n+1}(k+1) \\ \vdots \\ w_{n+\ell}(k+1) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$y_{k+1} = [y_k \cdots y_{k-n+1} x_k \cdots x_{k-\ell+1}] \begin{bmatrix} a_1(k) \\ \vdots \\ a_n(k) \\ b_1(k) \\ \vdots \\ b_\ell(k) \end{bmatrix} + [1c_1 \cdots c_m] \begin{bmatrix} e_{k+1} \\ e_k \\ \vdots \\ e_{k-m+1} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

とする。

3.4.3 ARMAX-Kalman プレディクタ

ARMAX モデルを (3.17), (3.18) 式や (3.19), (3.20) 式の形式で取り扱い, Kalman フィルタと組み合わせて将来の状態あるいはシステム出力を予測していく方式を, ARMAX-Kalman プレディクタと呼ぶ (Bolzern et al. (1980))。

3.3.3 で述べたように, Kalman フィルタ理論適用においては, 状態変数を物理量とする ((3.17), (3.18) 式を用いた状態推定法) か, モデルパラメタとする ((3.19), (3.20) 式を用いたパラメタ推定法) かという二つのオプションがある。また, どちらの方法に対してもシステムモデルのノイズ項を定常とみなすか非定常とみなすかというもう二つのオプションがある。すなわち, Kalman フィルタのアルゴリズムにおいて (3.12) 式の $\Gamma(k)Q(k+1)\Gamma^T(k)$ および (3.13), (3.15) 式の $G(k+1)R(k+1)G^T(k+1)$ が k にかかわらず一定とするか, 時間的に変化とするかである。便宜上これらのオプションをそれぞれオプション C (parameter Constant method; すなわち状態推定法), オプション E (parameter Estimation method; パラメタ推定法), オプション S (Stationary noise; 定常ノイズ), オプション N (Nonstationary noise; 非定常ノイズ) と略称することにして, これらを組み合わせた4つのプレディクタ (CS, CN, ES, EN) を比較検討する (宝・高棹・Barriga (1987))。

3.4.4 モデル同定

日単位の雨量・流量系列 (琵琶湖流域平均降水量と琵琶湖流入量のデータ) を対象とし, 1953~1969 年の 17 年 (6209 日) をモデル同定期間とした。ARMAX モデルのパラメタ $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_\ell; c_1, \dots, c_m$ は, モデル次数 ($n = 1, 2, 3; m = 1, 2; \ell = 1, 2$) の組み合わせ 12 通りについてそれぞれ Davidon のアルゴリズムを用いた最尤法 (高棹・椎葉・宝 (1981)) により同定し, 赤池の情報量規準 (AIC) により最適モデル次数を決定する (Akaike (1974))。こうして求められる最適モデルのパラメタは, 状態推定法 (CS および CN プレディクタ) では, c_1, \dots, c_m は固定されるが, $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_\ell$ は状態ベクトルの初期推定値として使われる。表 3.2 に同定結果として AIC の値および流入量のデータと計算値の誤差の二乗平均 MSE ((mm/day)²) を示す。ARMAX(3,2,2) が最小 AIC モデルであった。

3.4.5 予測性能の比較評価

同定期間より後の 1970 年から 1974 年の 5 年間のデータから 1~3 か月の予測性能検証用の期間を 12 期間選び, ARMAX(3, 2, 2)-Kalman プレディクタの予測性能を比較する。

さて, ノイズ項を非定常と考える場合 (オプション N) には, ノイズの統計量がどのように時間的に変化するか仮定あるいは推定しなければならない。ノイズの統計量を時々刻々推定していく方法はいくつか提案されている。たとえば, Jazwinski (1969) は観測ノイズの共分散行列 R は既知としてシステムノイズの共分散行列 Q を推定す

表 3.2: ARMAX モデル同定の結果

モデル次数 (n, m, ℓ)	MSE	AIC
(1, 1, 1)	21.23	19411.93
(1, 1, 2)	24.35	19783.67
(1, 2, 1)	24.06	19751.36
(1, 2, 2)*	—	—
(2, 1, 1)	31.30	20460.73
(2, 1, 2)*	—	—
(2, 2, 1)	22.02	19514.45
(2, 2, 2)	20.33	19301.12
(3, 1, 1)	21.11	19400.65
(3, 1, 2)	28.55	20216.76
(3, 2, 1)	24.40	19793.20
(3, 2, 2)**	20.16	10280.48

* 印は同定がうまくいかなかったことを示す。

** 最小 AIC モデル。

る方法を, Mehra(1970) は 1 ステップ先の予測誤差 $y_{k+1} - H(k+1)z(k+1|k)$ (innovation と呼ばれる) を利用して R および Q を推定する方法を, Todini (1978) は ARMAX モデルに状態推定用とパラメタ推定用の 2 つのフィルタを用意して R と Q を推定していく MISP (Mutually Interactive State-Parameter estimation) と呼ばれる方法をそれぞれ提案している。わが国では, 高棹・椎葉 (1980b), 星ら (1981) の研究がある。これらとは異なる方法として, 筆者らは, ノイズ項の大きさが状態量あるいは観測流量の大きさに依存すると考え, ノイズの係数行列が状態量とともに変化する形式 (これを乗算的ノイズと呼んでいる) を採用している (高棹・椎葉・宝 (1982, 1983), Takara et al. (1983))。ここでもオプション N としてこうした形式のノイズを用いることにする。

第 1 番目の検証データ (1970 年 1 月から 3 月の 3 か月間) を用いて, 各ブレディクタの計算条件 (ノイズの統計量と状態ベクトルの初期推定値の共分散行列) を次のように決めた。

CS, CN: (3.17) 式のシステムノイズ e_{k+1} の分散 σ_e^2 は 4.0 にセットする。初期状態の推定誤差共分散行列の対角成分の値はすべて 10.0 とする。(3.18) 式の観測ノイズ項については, CS の場合, 係数 d_k は 1.0, v_k の分散 σ_v^2 は 1.0 にセットし, CN の場合は, 係数 d_k は y_k の値を代入し, v_k の分散 σ_v^2 は 0.01 にセットする。

ES, EN: (3.19) 式のシステムノイズベクトルの共分散行列の対角成分の値はすべて 0.1 に, 初期状態の推定誤差共分散行列の対角成分の値はすべて 0.01 にセットする。(3.20) 式の観測ノイズベクトルの共分散行列の対角成分の値については, ES の場合はすべて 1.0 にセットし, EN の場合はすべて $(0.1y_{k+1})^2$ とする。

各期間における 5 日先までの予測誤差の二乗平均の平方根 (RMSE, root mean square error) を表 3.3 に示した。RMSE が大きい Period-4, 6, 7 は期間内に大きな出水を含んでいる。なお, リードタイムが 2 日以上の場合は降雨予測が必要であるが, 各ブレディクタの比較評価が本節の目的であることから, 降雨予測誤差はないものとした (完全降雨予測)。また, Kalman フィルタを使わないで, ARMAX(3, 2, 2) モデルで単純時系列予測した結果も併記してある。表 3.3 より, 以下のことが言える。

1. EN ブレディクタは, いつも悪い結果を与える。
2. 小出水の期間 (Period-8 や Period-10) に対しては, ES ブレディクタは他のものより良い結果を与えるが, 大出水に対しては予測性能が極めて悪い。特に Period-6 や Period-7 では予測が発散してしまっている。これは, パラメタを時々刻々推定するうちにパラメタの推定値が大きくなった時に大きな雨量や流量が観測され, それらが掛け合わせられたときにとんでもない予測流量が計算されることによる。
3. EN, ES ブレディクタは, 初期推定の精度が悪い (誤差共分散を大きく見積もる) と極めて悪い予測結果を与えることが何回かの試算により判明した。また, (3.19) 式のシステムノイズベクトルの共分散行列の対角成分の値をさらに大きく見積もると, パラメタの推定値の時々刻々の変動幅が大きくなるので 2. に述べた

表 3.3: ARMAX(3, 2, 2) モデルの予測性能の比較 (RMSE)

Period	Lead-Time (days)	Simple ARMAX model	ARMAX-Kalman				Period	Lead-Time (days)	Simple ARMAX model	ARMAX-Kalman			
			CS	CN	ES	EN				CS	CN	ES	EN
1 '70.1 '70.3	1	9.40	9.29	9.15	10.55	22.00	7 '72.9 '72.10	1	93.50	93.76	86.01	823.74	130.94
	2	9.37	9.14	9.13	12.05	19.63		2	93.68	95.57	94.57	4152.9	110.64
	3	10.70	10.73	10.67	13.47	21.00		3	96.10	96.72	94.47	29621.	137.13
	4	10.56	10.49	10.48	14.16	21.48		4	94.06	95.01	94.00	2.0E+5	135.43
	5	10.90	10.89	10.89	15.07	21.72		5	93.53	94.03	93.76	1.3E+6	142.72
2 '70.6 '70.7	1	14.11	14.10	13.80	26.34	79.74	8 '72.12 '73.2	1	5.62	5.68	5.70	4.58	8.47
	2	14.54	14.85	14.79	38.58	84.97		2	5.50	5.53	5.53	4.89	9.70
	3	14.84	14.93	14.82	39.82	110.68		3	5.71	5.71	5.73	5.29	10.28
	4	15.02	15.15	15.05	44.37	70.51		4	6.00	6.03	6.04	5.54	12.03
	5	14.96	14.98	14.95	32.17	126.73		5	6.01	6.02	6.01	5.63	12.69
3 '70.9 '70.10	1	7.32	7.38	7.36	11.58	16.49	9 '73.4 '73.5	1	6.11	6.21	6.29	7.05	15.21
	2	7.33	7.48	7.47	11.13	14.83		2	6.06	6.26	6.26	7.77	14.56
	3	7.49	7.50	7.48	7.39	17.13		3	5.99	6.01	6.04	9.13	17.77
	4	7.63	7.64	7.63	8.40	16.34		4	6.05	6.16	6.16	8.47	19.19
	5	7.86	7.87	7.86	9.59	18.83		5	5.98	6.02	6.01	9.12	17.52
4 '71.7 '71.9	1	41.85	41.80	38.73	48.60	52.12	10 '73.6 '73.7	1	2.34	2.42	2.43	1.57	2.85
	2	42.40	43.64	43.19	48.66	56.07		2	2.31	2.37	2.36	1.49	3.18
	3	42.16	42.45	41.49	50.58	54.51		3	2.25	2.24	2.25	1.36	2.86
	4	40.33	40.76	40.12	49.38	53.34		4	2.69	2.71	2.71	1.91	3.78
	5	39.58	39.94	39.90	48.89	53.21		5	2.68	2.68	2.68	1.85	4.07
5 '71.10	1	5.26	5.50	5.60	7.87	10.78	11 '73.10 '73.11	1	5.08	5.11	5.15	8.38	12.24
	2	4.38	4.56	4.57	7.20	8.86		2	5.02	5.09	5.09	6.30	12.17
	3	3.43	3.47	3.50	5.14	8.32		3	5.23	5.26	5.27	7.35	13.47
	4	3.21	3.26	3.28	5.16	8.80		4	5.21	5.25	5.25	7.26	14.49
	5	3.26	3.29	3.29	6.58	9.90		5	5.22	5.23	5.23	7.38	14.72
6 '72.7	1	55.70	55.03	51.44	238.05	143.51	12 '74.4	1	16.10	15.64	15.02	52.29	37.90
	2	60.92	62.32	61.53	342.16	193.06		2	17.90	17.69	17.54	55.01	60.89
	3	62.96	63.18	62.07	292.49	261.69		3	19.82	19.74	19.51	72.79	72.34
	4	65.41	66.00	65.16	413.00	305.89		4	20.92	21.01	21.07	98.89	70.06
	5	65.96	66.34	65.67	386.49	265.21		5	20.53	20.54	20.68	100.97	45.95

と同じ理由により極めて悪い予測結果を与えることになる。システムノイズベクトルの共分散を小さく見積もっておかなければならないということは、すなわち、パラメタの初期推定値（モデル同定のステップで最適化された値）を重視すべきことを意味し、通常の ARMAX モデルによる単純予測と変わらないことになり、Kalman フィルタを用いる意味がない。結局、“パラメタ推定法”は‘不安定な’予測方式であると言える。

4. ほとんどの場合、“状態推定法”は“パラメタ推定法”より良い結果を与え、‘安定な’予測方式であると言える。
5. CS と CN を比較すると、小出水では CS が良いが、それ以外では常に CN の方が良い。Kalman フィルタを用いない通常の ARMAX モデルと比較すると、小出水の場合通常の ARMAX モデルの方が良い結果を示すこともある。しかしながら、中・大出水では常に CN が優れている。
6. 結局、非定常ノイズを考慮した状態推定法が予測手法として優れている。

ここで用いたモデル（線形の時系列モデル）、時間単位（日単位）と流域条件（3,848 km²の琵琶湖流域を単一入力・単一出力系とみなした）などは水文学的観点からはかならずしも十分ではないが、本研究の結果は非常に示唆的であって、非線形モデルの場合にパラメタ推定法を用いることの危険性は容易に類推されよう。

3.5 非線形システムの場合の取り扱い

わが国のような河川流域では、流出システムの非線形性を考慮しなければならない場合が多い。本節ではこのような場合の取り扱いについて述べる。

3.5.1 予測更新

現時点を t_k とし、 ΔT 時間先の時点 $t_{k+1} = t_k + \Delta T$ における洪水流量の予測を考えよう。現時点の \mathbf{x} の確率分布を求める。次に、いま求めた \mathbf{x} の確率分布が与えられると、それを初期条件とし、雨量 r_{k+1} を与え、確率微分方程式 (3.3) を解いて $t = t_{k+1}$ の \mathbf{x} の確率分布を求める。次に、いま求めた \mathbf{x} の確率分布を (3.4) 式により \mathbf{y}_{k+1} の確率分布に変換するという手順になる。

実際問題としては、 \mathbf{x} , \mathbf{w} , \mathbf{v} の確率分布、確率特性が既知である必要があり、それが既知であったとしても (3.3) 式を解くのは一般に容易ではない。しかし、確率分布として正規分布を仮定し、 \mathbf{x} , \mathbf{w} , \mathbf{v} が相互に無相関であるとすれば、 \mathbf{f} を微小時間 $\Delta t (\leq \Delta T)$ 毎に線形化・離散化することにより、(3.3) 式を近似的に解くことができ、実用上はそれで十分である。

流量 \mathbf{y}_k が得られた後の $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$ の条件付期待値を $\hat{\mathbf{x}}$ 、その共分散行列を \hat{P}_k と表し、 $\mathbf{x}(t)$, $t \geq t_k$ については $\hat{\mathbf{x}}(t)$, $\hat{P}(t)$ と表すことにする。 \mathbf{w} , \mathbf{v} の確率分布は時間的に一定で

$$E[\mathbf{w}(t)] = 0, \quad E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = Q\delta(t-\tau) \quad (3.21)$$

$$E[\mathbf{v}_k] = 0, \quad E[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_\ell^T] = R\delta_{k,\ell} \quad (3.22)$$

とする。ここに $\delta(t-\tau)$ は Dirac のデルタ関数、 $\delta_{k,\ell}$ は Kronecker のデルタ、 T は転置記号、 $E[\cdot]$ は期待値記号である。

時刻 $s(t_k \leq s < t_{k+1})$ において、 \mathbf{f} を線形化して

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b} + F\mathbf{w}(t) \quad (3.23)$$

これを離散化して

$$\mathbf{x}(s + \Delta t) = \Phi\mathbf{x}(s) + \phi + \Gamma\mathbf{w}_s \quad (3.24)$$

ここで Δt 内で \mathbf{w}_s は一定とし、

$$E[\mathbf{w}_s] = 0, \quad E[\mathbf{w}_s\mathbf{w}_s^T] = Q_s = Q/\Delta t \quad (3.25)$$

である。(3.24) 式より、

$$\hat{\mathbf{x}}(s + \Delta t) = \Phi\hat{\mathbf{x}}(s) + \phi \quad (3.26)$$

$$\hat{P}(s + \Delta t) = \Phi\hat{P}(s)\Phi^T + \Gamma Q_s \Gamma^T \quad (3.27)$$

この手順を繰り返し、 $t = t_{k+1}$ における x の条件付期待値 $\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}(t_{k+1})$ と共分散 $\tilde{P}_{k+1} = \tilde{P}(t_{k+1})$ を得る。
(3.4) 式の g を $t = t_{k+1}$ で線形化して、

$$y_{k+1} = Hx(t_{k+1}) + \eta + Gv_{k+1} \quad (3.28)$$

したがって、 y_{k+1} の条件付期待値 \tilde{y}_{k+1} と共分散 \tilde{Y}_{k+1} は、それぞれ

$$\tilde{y}_{k+1} = H\tilde{x}_{k+1} + \eta \quad (3.29)$$

$$\tilde{Y}_{k+1} = H\tilde{P}_{k+1}H^T + GRG^T \quad (3.30)$$

となる。以上の手順を繰り返して $t = t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{k+m} (m \geq 1)$ における流量の予測値が求められる。

ただし、上記の手順は入力 $r(t), t_k \leq t \leq t_{k+m}$ が確定的に与えられる場合である。それが確率的に与えられる場合には、 $m\Delta T$ 時間先までの予測降雨ベクトル

$$u_k = [\hat{r}_{k+1}^T, \dots, \hat{r}_{k+m}^T]^T \quad (3.31)$$

を状態ベクトルに追加し、(3.23) 式で

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \quad (3.32)$$

と置き直して同様の手順を繰り返す。

3.5.2 観測に伴う状態推定の更新 (観測更新)

時間が ΔT だけ進んで $t = t_{k+1}$ になると、雨量と流量の観測値が得られる。 $t = t_k$ において状態推定 \hat{x}_k, \hat{P}_k を出発値とし不確定入力 u_k を用いて、 $\tilde{x}_{k+1}, \tilde{P}_{k+1}$ を得ていた場合、ここで新たに確定入力 r_k を入手したので、 \hat{x}_k, \hat{P}_k を出発値とし入力を r_{k+1} として $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ の間の最予測を行う。こうして得た $t = t_{k+1}$ における x の推定値を $\hat{x}_{k+1}, \hat{P}_{k+1}$ と置き直す。既に確定入力を得ていた場合には、この再予測の手順は省略される。

次に、流量の観測値 y_{k+1} を用いて x の期待値と共分散を求める。この際、Kalman フィルタを適用して、

$$\hat{x}_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} + K(y_{k+1} - \tilde{y}_{k+1}) \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{k+1} &= (I - KH)\tilde{P}_{k+1} \\ &= (I - KH)\tilde{P}_{k+1}(I - KH)^T + KGRG^TK^T \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$K = \tilde{P}_{k+1}H^T(H\tilde{P}_{k+1}H^T + GRG^T)^{-1} \quad (3.35)$$

となる。 y_{k+1} が欠測のときは、 $\hat{x}_{k+1} = \tilde{x}_{k+1}, \hat{P}_{k+1} = \tilde{P}_{k+1}$ とすればよい。

3.5.3 数値計算上の注意

a) 非線形性の処理

(3.3), (3.4) 式に含まれる関数、 f, g が非線形の場合、それを線形化する方法としては、状態量の最新の推定値の回りに Taylor 展開して 1 次の項までとる方法 (extended Kalman filter, 拡張 Kalman フィルタ) や統計的線形化による方法 (statistically linearized filter, 統計的線形化フィルタ) がある。前者は Taylor 展開可能という条件が必要であるが、後者はそのような制限がなく精度的にも前者より一般に有利であるとされている。非線形関数の近似度をさらに上げるため、高棹・椎葉らは統計的二次近似の方法を展開している (高棹・椎葉・富澤 (1984), Takasao and Shiiba (1984))。

b) 離散化

(3.23) 式を (3.24) 式の形に離散化するには、 e^{tA} の近似式を用いればよい。たとえば、Padé 近似によれば、

$$\Phi = \left[I - \frac{\Delta t}{2}A + \frac{\Delta t^2}{12}A^2 \right]^{-1} \left[I + \frac{\Delta t}{2}A + \frac{\Delta t^2}{12}A^2 \right] \quad (3.36)$$

$$\phi = \left[I - \frac{\Delta t}{2}A + \frac{\Delta t^2}{12}A^2 \right]^{-1} \Delta t b \quad (3.37)$$

$$\Gamma = \left[I - \frac{\Delta t}{2}A + \frac{\Delta t^2}{12}A^2 \right]^{-1} \Delta t F \quad (3.38)$$

となり、この場合 Δt^5 の精度をもつ。

c) フィルタのアルゴリズム

(3.33)~(3.35) の Kalman フィルタのアルゴリズムでは、(3.34) 式の中辺よりも右辺を用いた方が数値的精度の点で優れている。また、 \mathbf{x} の共分散 P を、対角成分がすべて 1 の上三角行列 U と対角行列 D の積、すなわち $P = UDU^T$ の形式で更新してゆくアルゴリズムも提案されている (Bierman (1977))。これは、UD 分解フィルタと呼ばれ、さらに数値的安定性が高い (片山 (1983))。

3.6 モデルの不十分さへの対処 — 有色ノイズの考慮

(3.3), (3.4) 式中の f, g の記述が不適切である場合には、ノイズ w および v の白色正規性の仮定が必ずしも満足されないので予測に偏りが生じることがある。このような場合にノイズ項の有色性を考慮して対処する方法がある。

(3.3) 式のシステムノイズ $w(t)$ の有色性を考慮するために、われわれは、二通りの方法を探っている。

一つは、観測時間毎の離散的ノイズに置き直す方法で、 $t_{k-1} < t < t_k$ ではノイズを考えずに

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{c}, \mathbf{r}_k) \quad (3.39)$$

で連続的に推移するとして、時刻 t_k に瞬間的にノイズが加えられるとする。すなわち、

$$\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(t_k^-) + F'w_k \quad (3.40)$$

ここに、 w_k 時刻 t_k において考慮されるシステムノイズベクトル、 $\mathbf{x}(t_k^-)$ は (3.39) を t_k まで積分して得られる状態量、 F' は係数行列である。ここで、 w_k の第 i 成分を $w_{i,k}$ と書くことにして、

$$w_{i,k+1} = \rho_i w_{i,k} + e_{i,k} \quad (3.41)$$

なる 1 次の自己回帰型のノイズとする。ここに、 ρ_i は自己回帰係数、 $e_{i,k}$ は、 $w_{i,k}$ とは無相関で平均値 0、分散 $\sigma_{e,i}^2$ の正規白色系列とする。

もう一つは、指数関数的相関をもつ連続的ノイズで、このノイズベクトルを $p(t)$ (N_p 次元)、その第 i 成分を $p_i(t)$ と表すことにして、これが、

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_i}p_i(t) + e_i(t), t \geq t_0 \quad (3.42)$$

に従うものとする (Jazwinski (1970), Bierman (1977))。ただし、 $\tau_i > 0$ は時定数、 $e_i(t)$ は平均 0 で、

$$E[e_i(t)e_i(s)] = \frac{2}{\tau_i}\sigma_{p,i}^2\delta(t-s) \quad (3.43)$$

$$E[e_i(t)e_j(t)] = 0, \text{ for } i \neq j \quad (3.44)$$

を満たす連続白色正規過程である。ここで、 $\sigma_{p,i}^2$ は $p_i(t)$ の定常時分散、 $\delta(t-s)$ は Dirac のデルタ関数である。このシステムノイズベクトルを導入した場合、(3.3) 式は次のように書き改められる。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{c}, \mathbf{r}(t)) + F_x p(t), t \geq t_0 \quad (3.45)$$

ここに、 F_x は $N_x \times N_p$ 次元の行列である。結局、確率過程の状態空間型流出モデルとして、

状態方程式:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_i(t) &= f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{c}, \mathbf{r}_k) + F_{ix}p(t), i = 1, \dots, N_x, t_{k-1} < t < t_k \\ \frac{d}{dt}p_i(t) &= -\frac{1}{\tau_i}p_i(t) + e_i(t), i = 1, \dots, N_p \end{aligned} \quad (3.46)$$

出力方程式:

$$q(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{c}) + G_q p(t) \quad (3.47)$$

観測方程式:

$$y_k = q(t_k) + Gv_k \quad (3.48)$$

の形式で記述される。ここに、 x_i, f_i は x, f の第 i 成分、 q は有色ノイズを考慮した場合のシステム出力、 y は出力の観測値で、 v_k は平均値 0、共分散 R の白色正規過程である。 F_i は係数行列 F_x の第 i 行ベクトル、 G_q, G は係数行列である。このような定式化に基づいてモデルの不十分さに対処するわけである。

別の対処の仕方として、モデルパラメタを状態量と読み替え、パラメタ値を時々刻々の入出力 (降雨 - 流出) の応答に適合するように推定し直しながらモデルの不十分さを補ってゆく方法がとられることもある (7.3 で述べたパラメタ推定法)。しかしながら、3.4 で示されたように、パラメタ推定法による予測性能は必ずしも良好ではない。

また、ノイズ項の取り扱いについては、それが定常であるか非定常であるか、ノイズ項の統計量を時々刻々推定するかしないかなど、3.3 で述べたように、種々の取り扱い方があるので注意を要する。

3.7 単一流域 (非線形 SISO システム) への適用

本節では、流出予測の最も基本的な単一流域の場合を考える。面積平均雨量を入力とし、流域末端流量を出力とする単一入力・単一出力 (SISO) システムである。

時刻 t_k における観測データの入手から、 $m\Delta T$ 時間先 (時刻 t_{k+m}) までの予測流量を得るまでの作業の流れを図 3.1 に示す。現に洪水が生起しつつあるというクリティカルな状況の中では、迅速かつ的確な情報の導出・判断・予報を行わねばならない。たとえば、 $\Delta T = 1$ hr とすると、これら一連の作業は 10min 内外で完了する必要がある。図 3.1 の作業の中では、観測データおよび降雨予測情報の入力と、 $m\Delta T$ 時間先までの予測計算に時間を要する。

データ入力に要する時間は、観測および降雨予測情報の入手形態に依存する。降雨流出が面積雨量・河川流量の形で得られる場合はキーボードからの入力でもあまり問題がないが、レーダ雨量計のメッシュデータや地点雨量・河川水位の形で得られる場合には、雨量データ数の増大により入力時間が増大する上に、それらを面積雨量・河川流量に変換しなければならない。

降雨予測情報入力の際には、降雨予測計算の時間と、予測降雨ベクトル u_k の次元が大きいときのその平均値と共分散行列の入力時間が問題となる。

また、予測更新に要する時間は、 x, u の次元、計算時間間隔 Δt と演算処理能力に依存することになる。

3.7.1 パソコン用プログラム RFP1

ダム管理や洪水予測業務の現場のすべてが、高速のコンピュータを利用できる環境にあるわけではない。こうした状況において、われわれの方法がどの程度の速度で処理しうるのか若干の検討を行った。³

パーソナルコンピュータ用の洪水予測プログラムを FORTRAN (マイクロソフト FORTRAN77, V3.00 版) により開発し、RFP1 (Real-time Flood Prediction) と名付けた。使用機種は、当時の水準ではやや高級のパソコンで、CPU として 16 ビットマイクロプロセッサ i8088、メモリは ROM が 2KB、RAM が 192KB、ディスク装置は 300KB のもの 2 台、コンソールとしてのブラウン管 (CRT)、記録印書用のプリンタを備えた程度のスタンドアロン・システムを想定した。

RFP1 は、単一流域用のコンプリートプログラム (実行時のメモリ占有領域は 39KB) であり、図 3.1 の破線で囲んだ部分を実行する。データの変換、降雨予測の作業が含まれていないのは、流域毎に観測情報入手の形態や降雨予測方法が異なるであろうことを配慮した。当該流域の事情に応じて、RFP1 を修正すれば機能の向上を図ることができる。

流出モデルは、木村モデル (貯留関数法) を採用している。この場合、確率過程的状态空間表示として (3.3), (3.4) 式は、

$$\frac{dx}{dt} = r_e(t - T_L) - \xi x^{1/p} + Fw(t) \quad (3.49)$$

$$y_k = \xi x_k^{1/p} + Gv_k \quad (3.50)$$

となる。ここに、 $\xi = (1/K)^{1/p}$ で、 K, p, T_L はモデルパラメタ、 r_e は有効降雨である。また、基底流量は一定とする。 $w(t), v_k$ は互いに無相関な正規白色過程で、ともに平均値 0、分散はそれぞれ σ_w^2, σ_v^2 とする。

³ただし、この検討は数年前のものであり (高・椎葉・宝 (1984)), 最近の情報処理分野の急激な展開により、当時よりも状況はかなり改善されていることを断わっておく。

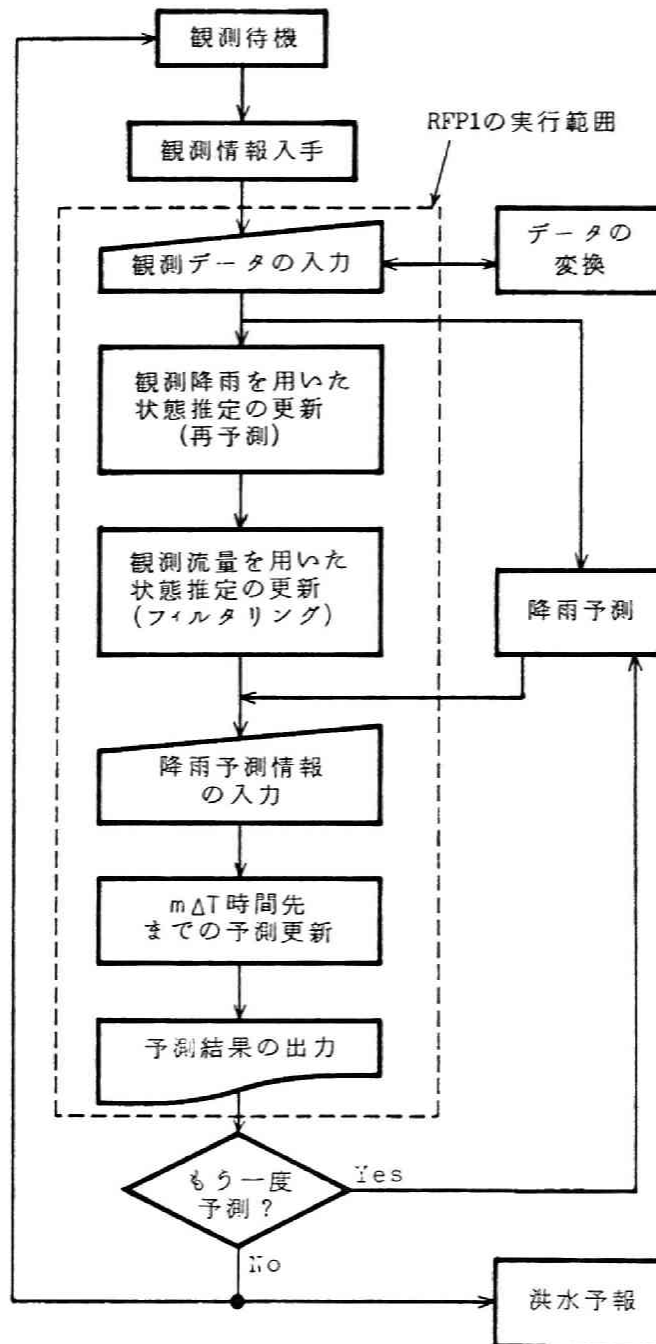


図 3.1: 観測から予測に至るまでの一連の手順

ここで、(3.49), (3.50) 式のノイズ項に二通りの考え方を導入する。一つは、 $F = G = 1$ とおいて、ノイズ項 $Fw(t), Gu_k$ の分散が r_e や x の大きさにかかわらず一定とする方法でこれを定常的ノイズまたは加算的ノイズと呼ぶ。もう一つは、 $F = r_e - \xi x_{1/p}, G = x_k^{1/p}$ とおいてノイズ項が r_e や x に依存すると考える方法で、これを非定常的ノイズまたは乗算的ノイズと呼ぶ。

RFP1 では、どちらの考え方も採用できるようになっている。われわれは、乗算的ノイズの方が合理的であると考えているが、加算的ノイズが用いられることも少なくないという事情をも考慮した。

先に述べた程度のレベルのパソコン (MULTI16; ただし、高速演算機構 i8087 と増設 RAM 128KB が追加されている。) によって、RFP1 を実行し、洪水予測業務を模擬的に実施した。

$\Delta T = 1.0, \Delta t = 0.1$ で $m = 5$ とした場合 (すなわち、 $m\Delta T = 5\text{hr}$ 先までの予測; ただし、 $T_L = 1.4\text{hr}$)、観測データの入力から予測結果の出力に至るまでに要する時間は 2min 程度であった。そのうちのほとんどがデータ入力等の操作時間であり、演算処理はきわめて短い時間で完了することがわかった。これは、RFP1 が 1 次元の状態量の流出モデルを採用しており、入力データ数も少ないことにもよる。

3.7.2 降雨予測誤差考慮のためのシミュレーション

“予測値”を与える場合にはその精度をも明らかにすべきである、というのが基本的な認識である。現実の降雨予測においてもそのような方向で予測が与えられることが望ましい。そのことによって、降雨-流出という自然現象の不確定性に対処しうし、本章で展開してきた予測方式における流出予測精度の定量的評価が容易となる。

さて、本節次項以後では、過去の降雨出水資料を用いて、これまで展開してきた流出予測方式を検討する。したがって、実際の降雨記録から、降雨予測値を指定された精度でシミュレートすることにする。

時刻 t_k において将来の降雨 $r_{k+l}, l = 1, 2, \dots$ とシミュレートされる予測値 \hat{r}_{k+l} との間に次のような関係が成り立つようにする。

$$E[\hat{r}_{k+l}] = r_{k+l} \quad (3.51)$$

$$\text{Var}[\hat{r}_{k+l}] = s_{k+l}^2 = a_p^2 \cdot l \cdot r_{k+l}^2 \quad (3.52)$$

ここに、 $a_p \geq 0$ はシミュレートされる降雨予測値の精度を制御するパラメタで、 $E[\cdot], \text{Var}[\cdot]$ はそれぞれ期待値、分散を示す。

すなわち、降雨予測の精度は、リードタイム l と生起するであろうと期待される降雨の値 r_{k+l} の 2 乗に比例すると考えているのであり、一応合理的な考え方と言えよう。シミュレートされる予測精度は a_p を適当に与えることによって変えることができる。たとえば、 $a_p = 0$ とすると完全降雨予測をシミュレートすることになる。ただし、 $a_p > 0$ であっても、 $r_{k+l} = 0$ のとき完全予測となる不合理が生じるので、 $r_{k+l} < 0.1 \text{ mm/hr}$ のときは 0.1 mm/hr の降雨が観測されたとする。

(3.51), (3.52) 式を満たすような $\hat{r}_{k+l} \geq 0$ であるべきこと、 $\hat{r}_{k+l} = 0$ をもある確率でとれるようにすることを考慮し、平均値 m_{k+l} 、分散 σ_{k+l}^2 をもつ正規分布で負値をとる部分を 0 に置き直した確率分布を考える。ただし、 \hat{r}_{k+l} の平均値、分散が r_{k+l}, s_{k+l}^2 となるように決定するものとする。 m_{k+l}, σ_{k+l}^2 が決定されれば平均値 m_{k+l} 、分散 σ_{k+l}^2 の正規乱数を発生させ、負のときは 0 と置き直したものを予測値 \hat{r}_{k+l} とすればよい (高棹・椎葉・宝 (1982ab))。

3.7.3 モデル誤差と観測誤差について

RFP1 で取り扱ったよりも、さらに複雑な流出モデルを用い、ノイズ項の有色性を (3.39)~(3.41) 式の形式で考慮した適用例を示す。

状態量を 6 個もつ 図 3.2 のような流出モデルを、神流川流域 (面積 374 km^2) に適用し、ノイズ項の大小や降雨予測精度と流出予測精度との関連について検討した結果を以下に示す (高棹・椎葉・宝 (1982b))。

降雨予測誤差の影響を排除するため、完全降雨予測 ($a_p = 0$) として、観測精度 $\gamma^2 = 0.01, \rho = 0.5, \sigma_\varepsilon^2 = 0.01$ を与えて、神流川出水 No.13 の予測を行った (Case1)。図 3.3(a), (b), (c) はそれぞれ 1, 3, 5 時間先の予測値を連ねた図であり、図 3.3(a') (b') (c') は流出予測値に予測誤差の標準偏差を加減してできる带状領域 (以下 “ 1σ 予測帯” と呼ぶ) と実測流量とを示したものである。リードタイムが長くなるほど、予測値が悪くなり (ハイドログラフの適合度が低下し)、予測精度も悪化する (すなわち、 1σ 予測帯が広がる) ことが見てとれる。

図 3.4 は同様の条件で $\sigma_\varepsilon^2 = 0.05$ とした場合 (Case2) の 1 時間先予測であるが、 1σ 予測帯はかなり幅広くなっている。これはモデル誤差 σ_ε^2 を大きく見積もりすぎたことによる。図 3.5 は逆に σ_ε^2 を小さくにとって、 $\sigma_\varepsilon^2 =$

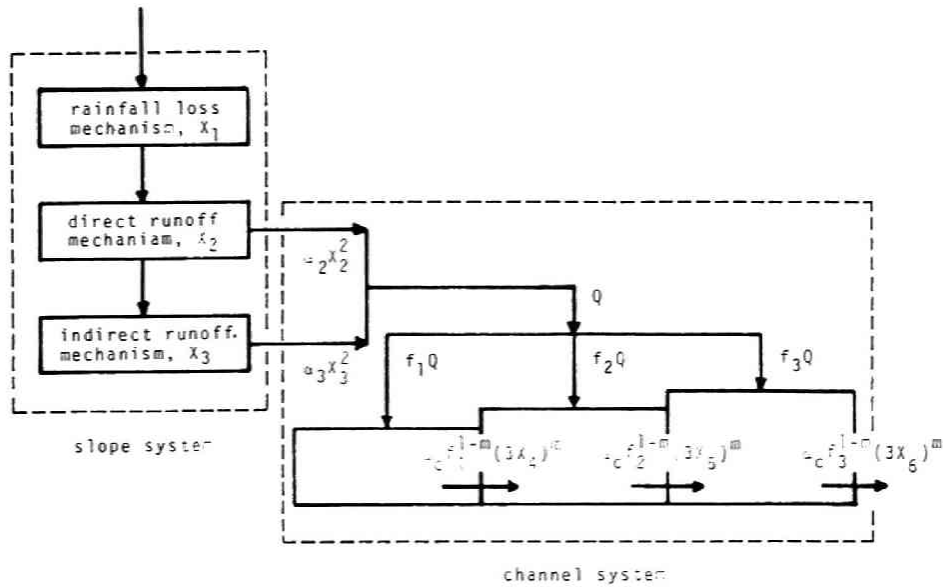


図 3.2: 6 個の状態量をもつ洪水流出モデル

0.0005 とした場合 (Case3) の 1 時間先予測である。予測値はかなり悪いにもかかわらず, 1σ 予測帯がせまくなっている (すなわち, モデルを信頼しすぎている)。

これらの結果から, $\sigma_e^2 = 0.01$ 程度が適当であると言える。

$$E[v_i^2] = \sigma_e^2 / (1 - \rho^2) \quad (3.53)$$

であるから, $E[v_i^2] = 0.0133$ となり, この標準偏差をとって, モデル誤差は 12% 程度と考えてよい。

図 3.6 は, 観測誤差だけを大きくとって $\gamma^2 = 0.05$ (標準偏差にして Case1 の 2 倍強) とした場合 (Case4) の 1 時間先予測である。観測誤差が大きくなったぶんだけ Case1 と比べて予測は悪化している。流量観測所によって観測誤差の評価は異なるであろうが, Case4 のように 20% 以上もの誤差では観測精度として不十分であろうし, また, あまりに小さすぎると不合理も生じてこよう。一般には 10% 内外の観測誤差としてよいと思われる。ケースごと (Case1~Case8) に設定したパラメタ値を表 3.4 に整理しておいた。

以上のように, モデル誤差や観測誤差を必要以上に大きく (あるいは小さく) 見積もると予測精度を適正に評価することができなくなるので注意しなければならない。

3.7.4 有色ノイズ導入の効果

前項ではモデル誤差が有色の場合のみを考え, $\rho = 0.5$ とした。そのとき $\sigma_e^2 = 0.01$ が適当であることを示した。これは, (3.53) 式より $E[v_i^2] = 0.0133$ であることに対応する。ここでは, モデル誤差を白色であるとして検討してみる。このとき $\rho = 0$ であるから $\sigma_e^2 = 0.0133$ となる (Case5)。有色ノイズの場合 (Case1) との比較は興味深い。

Case5 の予測結果を図 3.7 に示す。図 3.3 (Case1) と比べて, 1 時間先の予測は若干劣るが, 3, 5 時間先の予測は目視によっては両ケースの優劣はつけがたい。1 時間先の予測にかぎって言えば, 有色ノイズ導入の効果はあったと言えるであろう。

次の項で予測結果の評価について触れておくことにする。

3.7.5 リアルタイム流出予測の評価規準

前項のように, 実測ハイドログラフと計算ハイドログラフの適合度の良否は目視だけでは判断できない場合が少なからずある。ハイドログラフの適合度を議論するときには, 何らかの客観的指標 (評価規準) を示しておく必要がある。

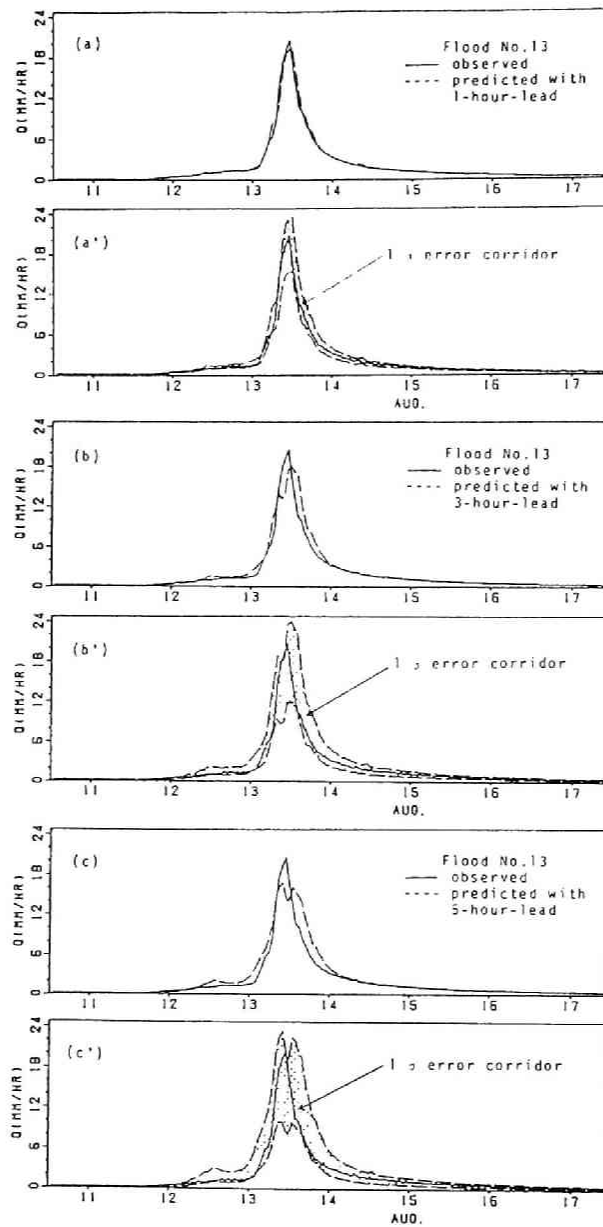


図 3.3: 神流川出水 No. 13 の予測 (Case 1)

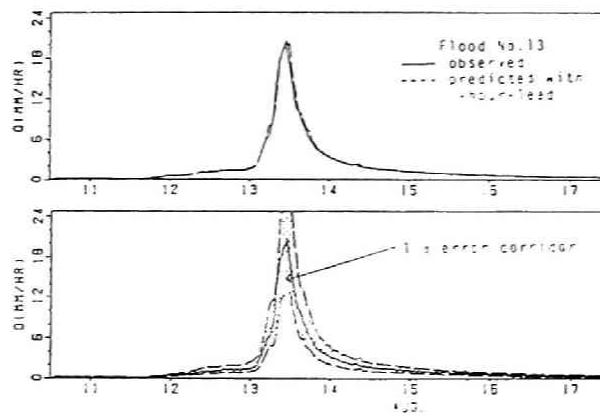


図 3.4: 神流川出水 No. 13 の予測 (Case 2)

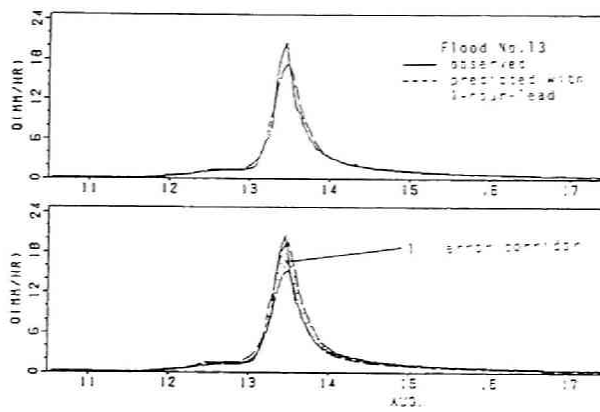


図 3.5: 神流川出水 No. 13 の予測 (Case 3)

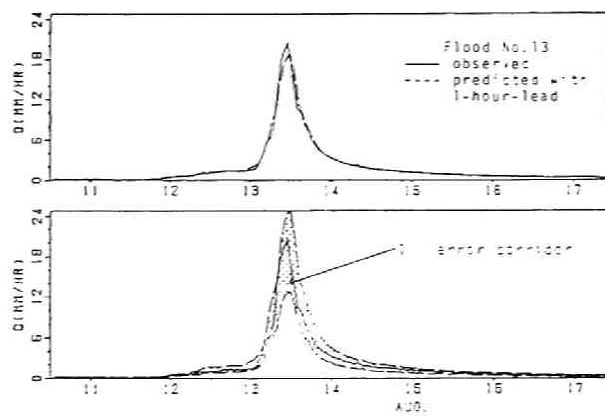


図 3.6: 神流川出水 No. 13 の予測 (Case 4)

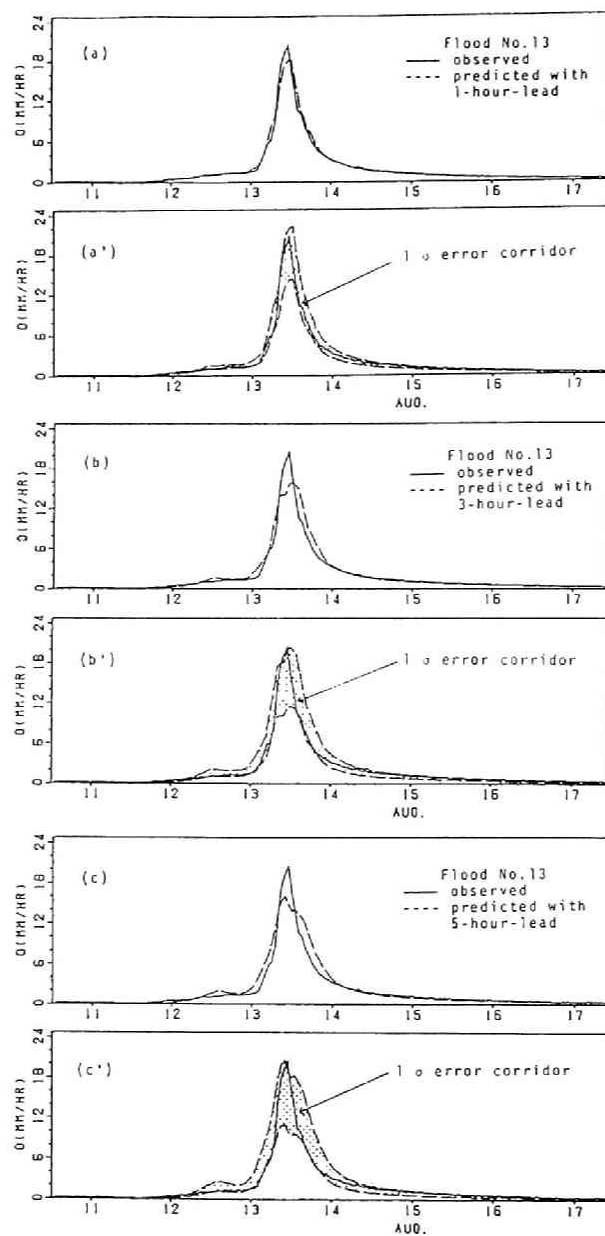


図 3.7: 神流川出水 No. 13 の予測 (Case 5)

本章では、次のような評価規準を用いる。ただし、 Q_o : 実測値、 Q_c : 計算値、 N : データの長さ (欠測を除く) で、 i は離散的な評価時点を表す ($i = 1, \dots, N$)。

1) 全期間中の二乗平均誤差

$$\text{TMSE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Q_o(i) - Q_c(i))^2 \quad (3.54)$$

2) 部分期間中の二乗平均誤差

$$\text{PMSE}(\alpha\%) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N k_i (Q_o(i) - Q_c(i))^2 \quad (3.55)$$

ここに、 $0 \leq \alpha < 100$ で、 $Q_{\max} = \max_i \{Q(i)\}$ とするとき、

$$k_i = \begin{cases} 0, & Q_o(i) < Q_{\max} \times \alpha/100 \quad \text{かつ} \quad Q_c(i) < Q_{\max} \times \alpha/100 \\ 1, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で、 M は $k_i = 1$ となる回数。すなわち、 $\text{PMSE}(\alpha\%)$ は、実測値または計算値がピークの $\alpha\%$ 以上の値をとる期間の二乗平均誤差である。

3) 有効性係数 (coefficient of efficiency)

$$\text{CE} = 1 - \frac{S}{S_0} \quad (3.56)$$

$$\text{ここに、} S = \sum_{i=1}^N (Q_o(i) - Q_c(i))^2$$

$$S_0 = \sum_{i=1}^N (Q_o(i) - \bar{Q}_o)^2, \quad \bar{Q}_o = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_o(i)$$

である。 $Q_o(i)$ の変動が大きく、実測値と計算値の適合度の良いとき、 CE は 1 に近づく。

4) 持続性係数 (coefficient of persistence)

$$\text{CP}(\ell) = 1 - \left[\sum_{i=\ell+1}^N (Q_o(i) - Q_c(i))^2 \right] / \left[\sum_{i=\ell+1}^N (Q_o(i) - Q_c(i-\ell))^2 \right] \quad (3.57)$$

ここに、 ℓ はリードタイムである。実測値の持続性が弱く、実測値と計算値との適合性の良いとき、 $\text{CP}(\ell)$ は 1 に近づく。

5) 予測誤差の相関係数

$$\mu(j) = \left[\sum_{k=1}^{N-j} \nu(k) \nu(k+j) / (N-j) \right] / \left[\sum_{k=1}^N \nu^2(k) / N \right] \quad (3.58)$$

ここに、 $\nu(k)$ は 1 時間ステップ先の予測誤差、 j はラグである。

6) 正規化された予測誤差の相関係数

$$\mu_n(j) = \left[\sum_{k=1}^{N-j} \tilde{\nu}(k) \tilde{\nu}(k+j) / (N-j) \right] / \left[\sum_{k=1}^N \tilde{\nu}^2(k) / N \right] \quad (3.59)$$

ここに、 $\tilde{\nu}(k) = \nu(k) / \sigma(k)$ で、 $\sigma(k)$ は Kalman フィルタ理論によって予測された $\nu(k)$ の標準偏差である。

$\mu(j)$ 、 $\mu_n(j)$ は、予測の最適性を評価する尺度であり、それらの値が 0 に近いほど良好な予測であると言える。

上記 3)~6) の評価規準は Kitanidis and Bras (1980b) によっても用いられている。

前項で問題となった Case1 と Case5 について、これらの評価規準値を求めて、表 3.5、表 3.6 に示した。表 3.5 のリードタイムが 1 時間の欄と表 3.6 とからは、なるほど、1 時間先予測については Case1 の方がすぐれていることがわかる。しかし、表 3.5 でリードタイムが 2~5 時間の欄に着目すると、逆に Case5 の方が予測は良好である。表 3.6 は Case1、Case5 のどちらの予測もまだ最適ではなく改善の余地があることを示している。Case1 では ρ 、 σ_ε^2 、 γ^2 の値、Case5 では σ_ε^2 、 γ^2 の値についてそれぞれさらに検討する必要がある。

ともあれ、本項で提示したような評価規準は、リアルタイム流出予測の良否を客観的に評価する指標として重要である。

表 3.4: ケースごとに設定したパラメタ値

Flood No.	Case	γ^2	σ_e^2	ρ	a_p^2
No. 13	Case 1	0.01	0.01	0.5	0.
	Case 2	0.01	0.05	0.5	0.
	Case 3	0.01	0.0005	0.5	0.
	Case 4	0.05	0.01	0.5	0.
	Case 5	0.01	0.0133	0.	0.
	Case 6	0.01	0.01	0.5	0.25
	Case 7	0.01	0.01	0.5	1.
No. 14	Case 8	0.01	0.01	0.5	0.25

表 3.5: 予測性能の評価規準

Case	Criteria	Lead Time, hours				
		1	2	3	4	5
Case 1 ($a_p^2=0$ $\rho=0.5$)	TMSE	0.231	0.622	1.00	1.25	1.31
	PMSE (10%)	1.19	3.01	4.80	6.11	5.99
	CE	0.981	0.948	0.917	0.896	0.892
	CP	0.620	0.700	0.756	0.804	0.848
Case 5 ($a_p^2=0$ $\rho=0$)	TMSE	0.279	0.600	0.833	0.952	0.988
	PMSE (10%)	1.38	2.97	4.07	4.59	4.68
	CE	0.977	0.950	0.931	0.921	0.919
	CP	0.543	0.711	0.797	0.851	0.886
Case 6 ($a_p^2=0.25$ $\rho=0.5$)	TMSE	0.218	0.602	1.11	1.70	2.39
	PMSE (10%)	1.12	2.91	5.46	8.09	10.7
	CE	0.982	0.950	0.908	0.859	0.803
	CP	0.642	0.710	0.731	0.734	0.724
Case 7 ($a_p^2=1.$ $\rho=0.5$)	TMSE	0.220	0.660	1.38	2.40	4.14
	PMSE (10%)	1.17	3.20	6.83	11.8	19.2
	CE	0.982	0.945	0.885	0.801	0.659
	CP	0.640	0.682	0.664	0.624	0.521
Case 8 ($a_p^2=0.25$ $\rho=0.5$)	TMSE	0.0261	0.0771	0.165	0.306	0.495
	PMSE (10%)	0.0915	0.274	0.571	1.03	1.64
	CE	0.984	0.953	0.900	0.815	0.702
	CP	0.457	0.489	0.471	0.414	0.351

表 3.6: 予測残差および正規化された予測残差の相関係数

lag (hr)	Case 1		Case 5		Case 6		Case 7		Case 8	
	μ	μ_n	μ	μ_n	μ	μ_n	μ	μ_n	μ	μ_n
1	0.33	0.44	0.54	0.73	0.35	0.44	0.37	0.45	0.15	0.68
2	0.04	0.33	0.16	0.66	0.11	0.36	0.14	0.37	0.18	0.61
3	-0.12	0.33	-0.16	0.62	-0.08	0.35	-0.05	0.36	0.36	0.66
4	-0.24	0.35	-0.30	0.59	-0.24	0.36	-0.23	0.36	0.41	0.71
5	-0.17	0.31	-0.24	0.53	-0.19	0.30	-0.23	0.29	0.44	0.66

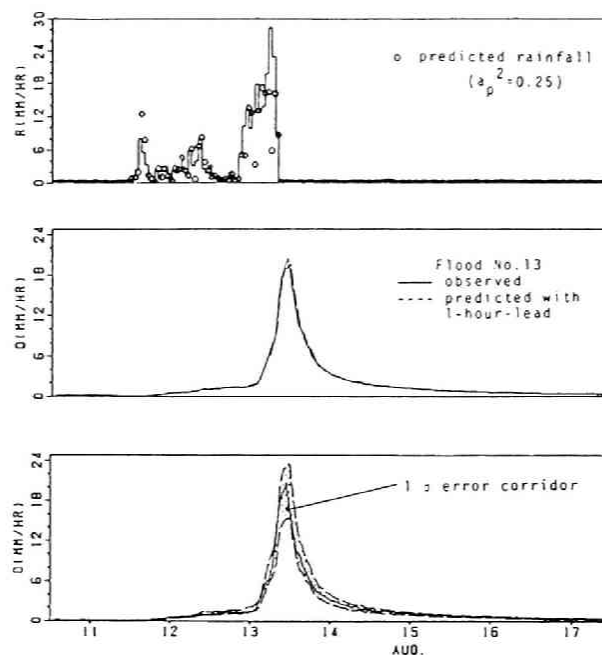


図 3.8: 神流川出水 No. 13 の予測 (Case 6)

3.7.6 降雨予測精度、リードタイムと流出予測精度の関連

これまでの項では、 $a_p^2 = 0$ (完全降雨予測) の条件のもとに種々検討してきた。本項では、降雨予測精度が流出予測精度の及ぼす影響について調べる。 $\gamma^2, \rho, \sigma_e^2$ の値は Case1 ($a_p^2 = 0$) と同じ値とし、 $a_p^2 = 0.25$ の場合 (Case6)、 $a_p^2 = 1.0$ の場合 (Case7) について、3.7.2 の降雨予測シミュレーション手法を援用して予測計算を行った。

Case6, Case7 それぞれの 1 時間先予測を 図 3.8, 図 3.9 に示す。

また、評価規準を表 3.5 に示した。図 3.3(a), (a') と 図 3.8, 図 3.9 あるいは表 3.5 から、リードタイム 2 時間程度以下であれば、Case1, Case6, Case7 の予測にあまり顕著な差は見られない。表 3.6 においてもその 3 ケースの予測の間に顕著な差は認められない。神流川流域の面積は 374 km^2 であるが、この程度の大きさの流域では、2 時間以下のリードタイムの流出予測精度は、降雨予測精度の影響をあまりうけないようである。しかし、リードタイムが 3 時間以上になると、降雨予測が流出予測精度に顕著に反映してくる (表 3.5 の Case1, Case6, Case7 の評価規準を比較せよ)。砂田 大沢 (1984) は、筆者らの考え方を適用して、流量観測精度と降雨予測精度が流出予測精度にどの程度の影響を与えるのかを調べている。

一般に降雨予測精度が悪くなれば流出予測精度は悪くなり、リードタイムが大きくなれば流出予測精度はやはり悪くなることは明らかである。降雨予測精度のより一層の向上を図ることによって、比較的長いリードタイムにおける確な流出予測が可能となる。

Case6 と同じ条件で、No.13 の出水よりもかなり規模の小さい出水 No.14 を予測した例が 図 3.10, 表 3.5, 表 3.6 に示されている (Case8)。本章で展開したリアルタイム流出予測手法は、出水規模の大小にかかわらず、良好な予測を与える有用な手法であると言えるが、ノイズの統計量を合理的に決定することが今後の課題となろう。

3.7.7 まとめ

本節での結果から以下のようなことが言える。

1. モデル誤差と観測誤差を補償するノイズを乗算的に (すなわち状態量と相関をもつようにして) 導入し、上の貯留モデルを確率過程的に取扱った。この乗算的ノイズは、状態量の大きな時には相対的にノイズの絶対値も大きい という水文学量特性を表現することができる。
2. 統計的線形化 (Statistical Linealization) 手法は、確率過程的非線形システムにおける線形化手法として比較的簡便で有用である。

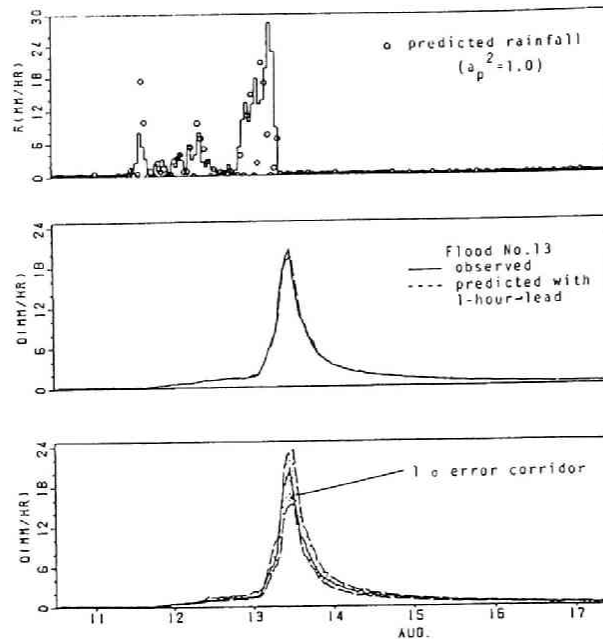


図 3.9: 神流川出水 No. 13 の予測 (Case 7)

3. 降雨予測が予測値とその分散によって与えられるような降雨予測シミュレーション法を示した。さらに、そのような降雨予測の不確定性をも考慮したリアルタイム流出予測手法を提示し、その有効性を検証した。
4. モデル誤差の有色性をも考慮し、モデル誤差と観測誤差について検討したが、試算的な検討にとどまった。ノイズの統計量を合理的に決定することが今後の課題である。
5. 流出予測の良否を客観的に評価する指標を用いて、それぞれのケースについて数量的に検討した。降雨予測精度、リードタイムと流出予測精度との関連を一応把握することができた。

3.8 複合流域 (非線形 MIMO システム) への適用

面積が数百～数千 km^2 の流域では、複数 (n 個とする) の単一流域に分割して流出解析が行われる。このような複合流域は、多入力・多出力系 (multi-input and multi-output (MIMO) system) であるため、単一流域の場合に比してやや複雑な取扱いとなる。

まず、入力である降雨は各分割流域毎の面積平均雨量をリードタイム分だけ予測しなければならないし、その時間的相関とともに空間的相関をも考慮に入れなければならない。すなわち、(3.31) 式の予測降雨ベクトル u_k の成分ベクトル r_k , $i = 1, \dots, m$ はすべて n 次のベクトルであるから、 u_k は $(n \times m)$ 次となる。また、各分割流域の流出モデルの次元 (状態量の数) が大きい場合、ノイズの有色性を考慮する必要がある場合には、全体としてかなり大きな次元をもつ状態空間モデルとなるので計算量の増大を招く。さらには、流域内の何ヶ所かにおいて観測流量が得られるで、時々刻々のそれらのデータをすべて利用することができる (欠測が生じた場合の処理を考えておく必要がある)。

3.8.1 由良川流域の洪水流出モデル

複合流域への適用例として、由良川福知山流域 ($1,350 \text{ km}^2$) をとりあげた。この流域では、主要な流量観測所が4ヶ所あり、木村モデル (貯留関数法) の組合せ (5 流域 2 河道) で流出モデルを構成している。このような場合は、遅滞時間による“時間ズレ”を考慮して状態空間モデルに統合しなければならない。

a) 由良川流域の概要と現行洪水流出モデル

由良川水系は近畿地方の北部に位置し、幹川由良川は若狭湾に注ぐ流域面積 $1,882 \text{ km}^2$ 、流路延長 146 km の河川である (図 3.11)。現在の由良川の計画高水流量は、昭和 28 年 13 号台風による洪水流量を対象に定められ、福知

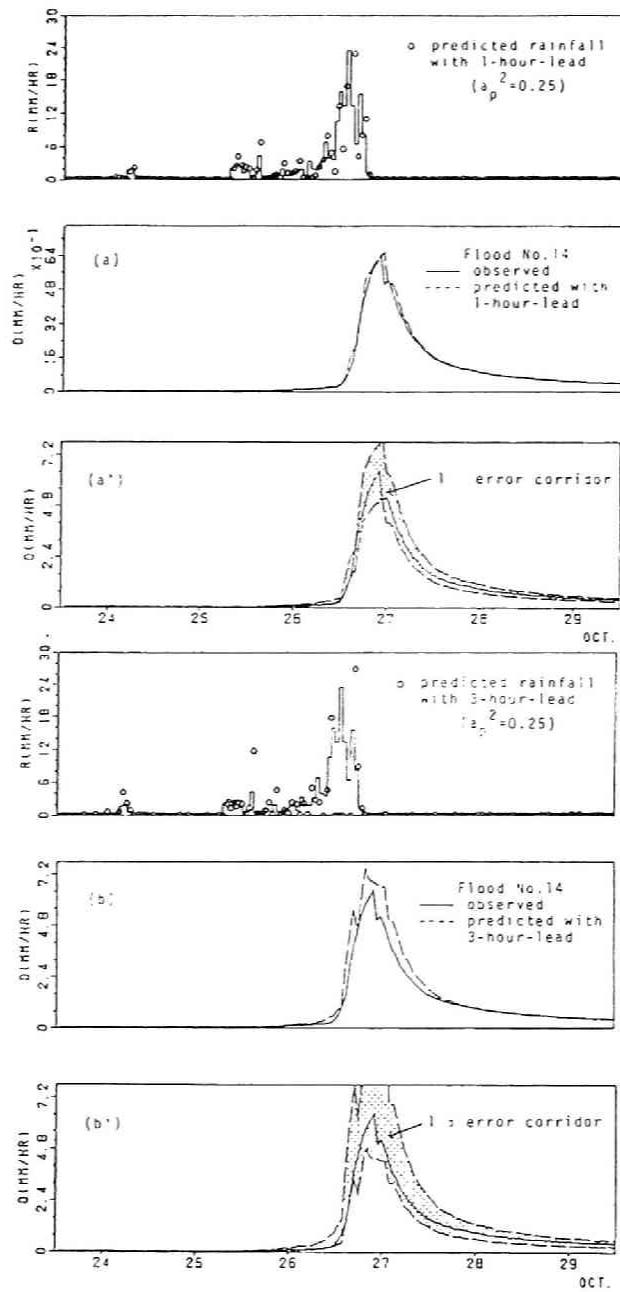


図 3.10: 神流川出水 No. 14 の予測 (Case 8)

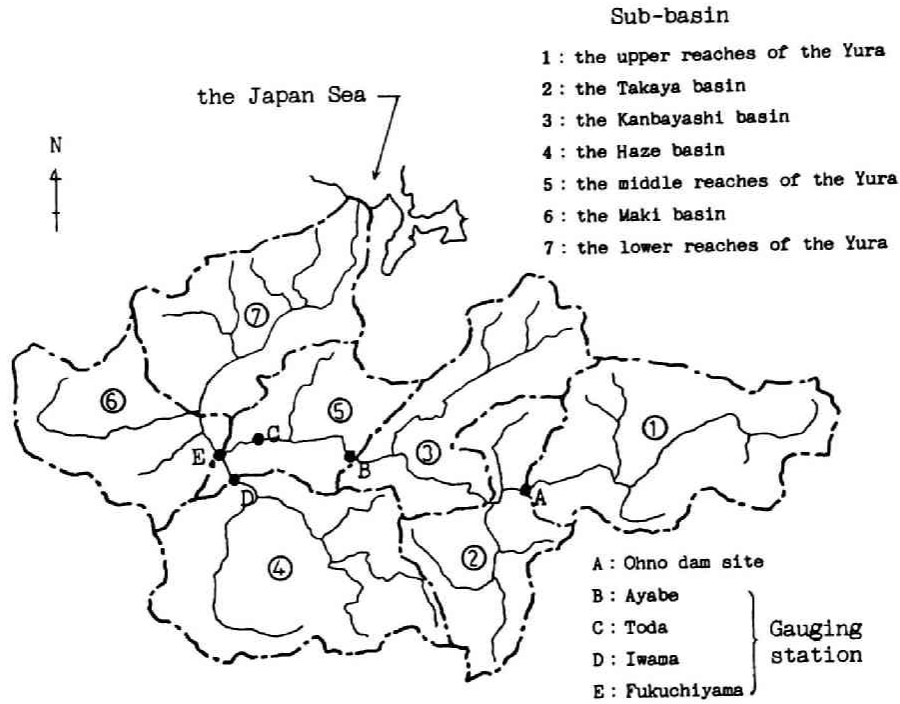


図 3.11: 由良川流域 (1,882 km²)

山基準地点における計画高水ピーク流量を 6,500 m³/sec とし、上流にある大野ダムによる洪水調節によって計画高水流量を 5,600 m³/sec としている。また、流域の年降水量は流域平均 1,500~2,300 mm 程度である。

由良川においては、流域平均雨量を用いて流出解析を行える集水面積は 300~400 km² が限度であるとして、福知山地点上流域 (1,350 km²) を 5 流域 2 河道の 7 つのサブシステムからなるものとしている (図 3.12)。

各サブシステムにおける流出計算は貯留関数法によって行われる。貯留関数法の基本式は、各流域では

$$s = Kq^P \quad (3.60)$$

$$\frac{ds}{dt} = r_e - q \quad (3.61)$$

河道では、(3.61) 式は、

$$\frac{ds}{dT} = i_c - q \quad (3.62)$$

と表される。ここに、 s はサブシステム内の雨水貯留高 (mm)、 r_e は流域平均有効雨強度 (mm/hr)、 q は基底流量 (由良川流域では 0 としている) をさし引いた流出高 (mm/hr)、 K と P は定数である。 i_c は河道への流入量 (m³/sec) をその河道より上流の集水面積 A (km²) で除し 3.6 をかけたもので、河道への流入高 (mm/hr) と呼んでおく。また、河道の雨水貯留高とはその河道内の貯留量を A で除したものであるとする。河道からの流出高という場合も、その河道からの流出量 (m³/sec) を A で除し 3.6 をかけたものである。有効雨量強度は、

$$r_e = \begin{cases} f_1 \cdot r & (R_a \leq R_{sa}) \\ r & (R_a > R_{sa}) \end{cases} \quad (3.63)$$

で求めることとしている。ここに、 r は観測降雨強度、 R_a は累加雨量、 R_{sa} は飽和雨量、 f_1 は一次流出率である。

各サブシステムの定数は表 3.7 のように求められている。ただし、現行モデルでは、大野ダム上流域の流出計算は行わず、毎時連絡される放流量を用いて河道 I への入力としている。

b) 現行流出モデルの状態空間表現

大野ダム上流域を除くと、現行モデルは 4 個の分割流域と 2 個の河道とをもつことになる。貯留関数法においては各サブシステム内の雨水貯留高のみを状態量と考えればよいので、合計 6 個の状態量をもつ状態空間モデルとして現行モデルを統合することができる。

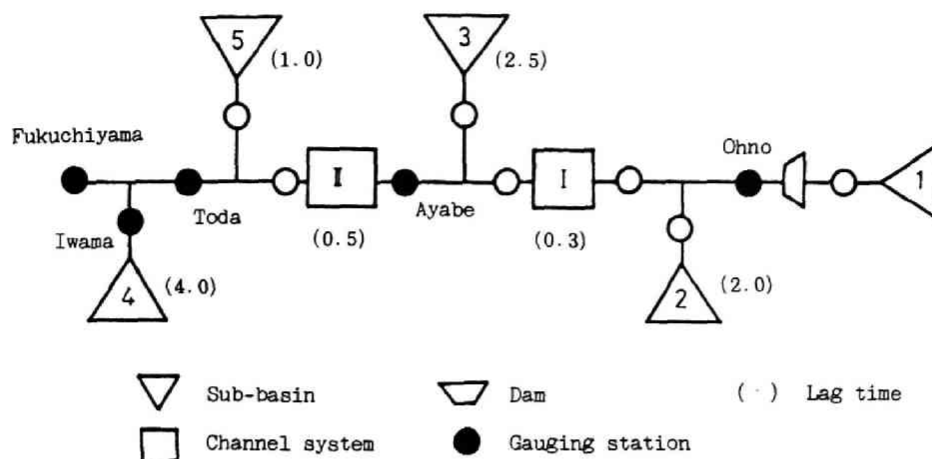


図 3.12: 現行洪水予測モデル

表 3.7: 由良川現行洪水流出モデルのパラメタ

Sub-system No.		Area (km ²)	K	P	Tl (hr)	Rsa (mm)
Sub-basin	1	350	—	—	—	—
	2	220	13	0.65	2.0	80
	3	240	30	0.65	2.5	80
	4	370	22	0.65	4.0	80
	5	170	20	0.65	1.0	80
Channel	I	—	9	0.6	0.3	—
	II	—	23	0.6	0.5	—

ただし、遅滞時間があるのでそのような統合化は多少面倒なものとなる。各サブシステムの遅滞時間のおんだけ福知山の時刻からさかのぼった時刻 τ を定義する。そのようにして、第 j 番目のサブシステム内の状態 $x_j(\tau)$ の推移を $\tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k$ で扱うということは、福知山における $t_{k-1} \leq t < t_k$ の間の流量 $q(t)$ に関する x_j の推移を扱うことに対応すると定義しよう。

サブシステム間の連結関係と雨水の量的な連続関係とを考慮して、 $\tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k$ における推移式を書くと次のようになる。

分割流域 ($i = 2, \dots, 5$) において、

$$\frac{ds_i}{dt} = r_{e,i} - \left(\frac{s_i}{K_i} \right)^{1/P_i} \quad (3.64)$$

ここに、 s_i は第 i 流域の雨水貯留高 (mm)、 $r_{e,i}$ は第 i 流域の有効降雨強度 (mm/hr)、 q_i は第 i 流域からの流出高で、 K_i, P_i は定数である。

河道 I, II において、

$$\begin{aligned} \frac{ds_I}{dt} &= \frac{3.6Q_1}{A_I} + \frac{A_2}{A_I} \left(\frac{s_2}{K_2} \right)^{1/P_2} - \left(\frac{s_I}{K_I} \right)^{1/P_I} \\ \frac{ds_{II}}{dt} &= \frac{A_I}{A_{II}} \left(\frac{s_I}{K_I} \right)^{1/P_I} + \frac{A_3}{A_{II}} \left(\frac{s_3}{K_3} \right)^{1/P_3} - \left(\frac{s_{II}}{K_{II}} \right)^{1/P_{II}} \end{aligned} \quad (3.65)$$

ここに、 s_I, s_{II} はそれぞれの河道における雨水貯留高 (mm/hr)、 q_I, q_{II} は河道からの流出高 (mm/hr)、 Q_1 は大野ダム放流量 (m^3/sec)、 K_I, K_{II}, P_I, P_{II} は、定数である。 A_i は、第 i 流域の面積 (km^2) で、特に、 A_I, A_{II} は、その河道より上流の流域の面積をすべて加えたものである。

観測流量は、綾部・戸田・岩間・福知山の4地点で得られ、

$$\begin{aligned} Q_{AYA} &= \frac{1}{3.6} (q_3 A_3 + q_I A_I) = \frac{A_3}{3.6} \left(\frac{s_3}{K_3} \right)^{1/P_3} + \frac{A_I}{3.6} \left(\frac{s_I}{K_I} \right)^{1/P_I} \\ Q_{TOD} &= \frac{1}{3.6} (q_5 A_5 + q_{II} A_{II}) = \frac{A_5}{3.6} \left(\frac{s_5}{K_5} \right)^{1/P_5} + \frac{A_{II}}{3.6} \left(\frac{s_{II}}{K_{II}} \right)^{1/P_{II}} \\ Q_{IWA} &= \frac{1}{3.6} q_4 A_4 = \frac{A_4}{3.6} \left(\frac{s_4}{K_4} \right)^{1/P_4} \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$Q_{FUK} = Q_{TOD} + Q_{IWA} = \frac{A_4}{3.6} \left(\frac{s_4}{K_4} \right)^{1/P_4} + \frac{A_5}{3.6} \left(\frac{s_5}{K_5} \right)^{1/P_5} + \frac{A_{II}}{3.6} \left(\frac{s_{II}}{K_{II}} \right)^{1/P_{II}} \quad (3.67)$$

となる。ここに、 $Q_{AYA}, Q_{TOD}, Q_{IWA}, Q_{FUK}$ は、それぞれ綾部、戸田、岩間、福知山の流量を表す。

以後、簡単のために、 τ を t と読み替える。また、雨水貯留高 s を x と表示して、 s_2, \dots, s_5 を x_1, \dots, x_4 に、 s_I, s_{II} を x_5, x_6 にそれぞれ置き直し、 $Q_{AYA}, Q_{TOD}, Q_{IWA}, Q_{FUK}$ も y_1, \dots, y_4 と置き直して記述する。

こうして、現行の洪水流出モデルは、状態方程式 (3.64) および (3.65) と 観測方程式 (3.66) によって、決定論的状態空間モデルに統合することができた。

3.8.2 由良川流域における洪水流出の確率予測手法

本項では、由良川福知山上流域における現行の流出モデルを確率過程的に取扱い、上述の流出予測手法の適用法を述べる。

a) 降雨予測・大野ダム放流量の予測

福知山上流域を対象とした状態空間モデル (3.64)~(3.66) 式のシステム入力は、 $r_{e,2}, r_{e,3}, r_{e,4}, r_{e,5}, Q_1$ である。第 j 番目のサブシステムと福知山地点との遅滞時間による時間ずれを T_j とすると、予測時間 (リードタイム) L が T_j より小さいときは、その第 j サブシステムへの入力の予測は不要である。しかし、 $L > T_j$ となれば入力の予測が必要となる。

図 3.13 は、 T_j と L と流出予測計算に必要な降雨データの関係を示している。たとえば、福知山の3時間先までの流量予測を行うには、和知残流域では過去3時間の観測降雨と今後1時間先までの予測降雨が必要であることを示している。

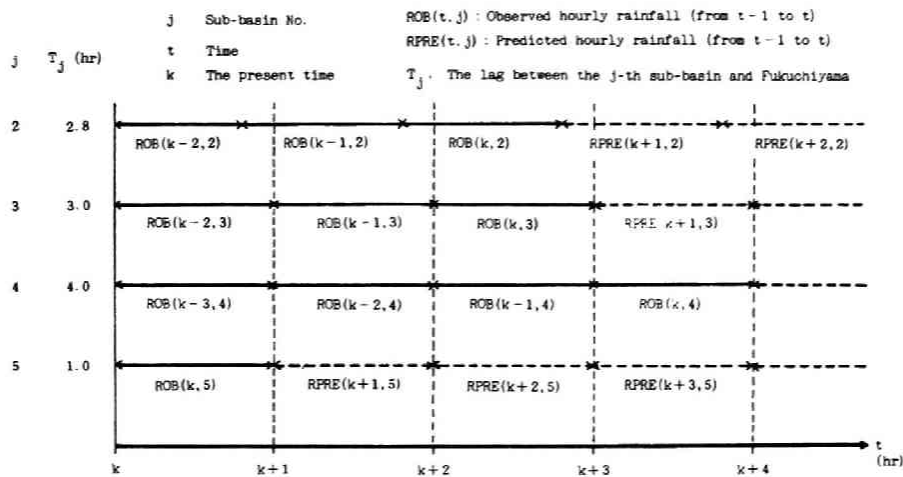


図 3.13: 遅滞時間と観測・予測降雨データとの関係

流出予測を確率過程的に取扱う際には、予測量としての入力値は、その予測誤差の予測量間の時間的・空間的相関を共分散の形で与えなければならない。時刻 k において予測された第 j 流域の i 時間先の予測降雨を $RPRE(k+i, j)$ とすると、図 3.13 より、3 時間先の流量予測の場合には、予測降雨として $RPRE(k+1, 5)$, $RPRE(k+2, 5)$, $RPRE(k+1, 2)$ が必要であり、それらの予測誤差の共分散を与えなければならないのである。4 時間先の流量予測の場合は、さらに $RPRE(k+1, 3)$, $RPRE(k+3, 5)$, $RPRE(k+2, 2)$ を加えて合計 6 個の予測降雨の共分散を与える。リードタイムが 4 時間より大きくなると、土師川（岩間上流）流域の降雨予測も必要となるので、予測降雨の次元はさらに増大する。したがって、福知山の流量予測はとりあえず 4 時間先まで行うこととする。

降雨予測の方法は、建設省の洪水予報業務においてよく用いられている前 3 時間移動平均法によることにした。この方法は単純な時系列予測であるが、従来の流出予測において特別な不都合を生じなかったこと、またその計算が簡便であることなどから多用されてきたものである。ここで、前 3 時間移動平均予測とは、現時点から過去 3 時間の時間雨量系列の平均値⁴を降雨予測値とし、これが今後 L^* 時間持続するとする予測法である。現時点を k 、観測された時間雨量系列を $\dots, r_{k-2}, r_{k-1}, r_k$ とし、予測降雨を \hat{r}_{k+l} ($l = 1, \dots, L^*$) とすると、

$$\hat{r}_{k+l} = (r_{k-2} + r_{k-1} + r_k) / 3 \quad (3.68)$$

である（ただし、 $L \leq L^*$ ）。

由良川流域の各分割流域平均時間雨量を上の方法で予測したときの予測誤差を、分割流域ごと・リードタイムごとに求めて、予測誤差相互の共分散を求めた。対象とした降雨記録は、昭和 37 年から昭和 50 年の間に由良川で生じた 25 出水時のもので、建設省近畿地方建設局福知山工事事務所・（株）日本水道コンサルタント⁵（1982）が整理したものである。求めた降雨予測誤差の共分散を表 3.8 に示す。同様に、大野ダムの放流量も予測値およびその予測誤差の分散も与えなければならない。放流量の予測は、大野ダム上流域の降雨予測および流出モデルによる流出予測（すなわちダムへの流入量予測）を行った上で、ダムの操作法に基づいて行うことになる。したがって、大野ダム上流域の降雨予測と他流域の降雨予測との相関を通じて、放流量予測誤差と他流域の降雨予測誤差の共分散も考慮する必要がある。しかし、前述のように現行モデルがダム上流域の流出モデルを考慮していないこと、ダムの操作までモデルに組み込むのは多少複雑になることなどの理由で、ここでは、放流量を完全に予測できるものとして、確定量として与えることにする。

b) 由良川流域の統合モデルの確率過程的扱いと状態の推定・予測

確率過程的流出モデルの状態方程式は (3.45) 式で表され、由良川福知山上流域では、その関数 f は (3.64) および (3.65) 式で与えられる。

⁴ この平均値を定数倍することもある。

⁵ 現（株）日水コン。

表 3.8: 降雨予測誤差の共分散行列

(i, j)*	(1, 2)	(2, 2)	(1, 3)	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)
(1, 2)	13.8	10.5	10.6	6.0	4.8	3.7
(2, 2)	10.5	17.9	8.4	7.0	8.9	7.3
(1, 3)	10.6	8.4	14.9	8.8	6.1	5.2
(1, 5)	6.0	7.0	8.8	13.5	9.9	7.6
(2, 5)	4.8	8.9	6.1	9.9	18.1	13.7
(3, 5)	3.7	7.3	5.2	7.6	13.7	20.5

* (i, j) denotes i-hour-ahead prediction of the rainfall in the j-th sub-basin

上述のように、リードタイムが1時間をこえると降雨の予測が必要となる。このとき、将来の予測降雨 \hat{r} を確率変量として取扱い、(3.31), (3.32) 式のように状態ベクトルの次元を拡大する。このようにして (3.45) 式を統計的線形化することにより (3.23) 式、さらに差分化して (3.24) 式に相当する式を得る。推定値 (期待値・共分散行列) の推移は (3.26), (3.27) 式で求められることになる。

一方、リードタイムが1時間以内の時は降雨の予測が不要である。

c) ノイズの統計量について

確率過程的状态空間モデルと Kalman フィルター理論とを結合して状態の推定・予測を行おうとする場合に最も問題なのは、ノイズの統計量 (特に共分散の大きさ) をいかに評価するかということである。というのは、Kalman フィルターのアルゴリズムにおいて、1 ステップ先の状態予測誤差共分散を求めるときにシステムノイズの共分散行列が、Kalman ゲイン行列を計算するときに観測ノイズの共分散行列が、それぞれ各時点において与えられていなければならないからである。

本研究では、ノイズの取扱いを次の二通りとする。

(A) ノイズの統計量が全洪水期間中一定とする (表 3.1 の分類で言えば“定常状態推定法”)。

(B) ノイズの統計量が状態量に依存し時間的に変化するとする (“非適応的状态推定法”)。

前者はノイズの統計的性質が不変 (すなわち、定常的なノイズ) であると考えているのに対し、後者は非定常的なノイズを考慮することになる。

まず、観測ノイズについて考える。観測ノイズは、(3.28) 式において Gv_{k+1} である。(A) の場合は、 $G = I$ (単位行列)、 v_{k+1} の共分散行列 $R_{k+1} = R$ (一定) とする。(B) の場合は

$$G = \begin{bmatrix} H_1 x(t_{k+1}) + \eta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_{N_y} x(t_{k+1}) + \eta_{N_y} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

とし、 $R_{k+1} = R$ (一定) とする。このようにすると、 y の第 i 成分 y_i , ($i = 1, \dots, N_y$) は次のようになる。

$$y_i = (H_i x + \eta_i)(1 + v_{k+1,i}), \quad i = 1, \dots, N_y \quad (3.70)$$

ここに、 η_i と $v_{k+1,i}$ は、(3.28) 式中の η と v_{k+1} の第 i 成分である。この形式のノイズを“乗算的観測ノイズ”と呼ぶ。

$$E[v_k] = 0; \quad E[v_k v_k^T] = R = \alpha^2 I \quad (3.71)$$

で、 I は N_y 次元の単位行列、 α は定数である ($\alpha > 0$)。このとき、すべての流量観測値が $\alpha \times 100$ % 程度の誤差をもつと仮定することになる。観測ノイズの共分散行列は、

$$GRG^T = \alpha^2 GG^T \quad (3.72)$$

次に、システムノイズについて考える。(3.42) 式のような指数関数的相関をもつ連続的ノイズの場合、 s から $s + \Delta t$ の間の P_i の推移は、次式で与えられる。

$$p(s + \Delta t) = Mp(s) + w, \quad (3.73)$$

ここに、 w_s は、 N_p 次の列ベクトルである。その第 i 成分は

$$w_{s,i} = \int_s^{s+\Delta t} \exp\left\{-\frac{s+\Delta t-t}{\tau_i}\right\} e_i(t) dt \quad (3.74)$$

で

$$M = \begin{bmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_{N_p} \end{bmatrix}; \quad \xi_i = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right) \quad (3.75)$$

このとき (3.25) 式は、

$$E[w_s] = 0, \quad E[w_s w_s^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{p_1}^2 (1 - \xi_1^2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{p_{N_p}}^2 (1 - \xi_{N_p}^2) \end{bmatrix} = Q_s \quad (3.76)$$

となる。(A) の場合、 σ_{p_i} の値を固定する。(B) の場合、ノイズ項の非定常性を考えるために、

$$\sigma_{p_i} = \beta \bar{x}_i(s), \quad i = 1, \dots, N_p \quad (3.77)$$

とする。ここに、 x_i は状態ベクトル x の第 i 成分で、 β は定数である ($\beta > 0$)。

結局、(A) はノイズの統計量が全期間一定の加算的ノイズであり、(B) はノイズの統計量が各時点の状態量に依存して時間的に変化する、観測ノイズについては乗算的に扱うことになる。

(A)、(B) 二通りの異なる形式のノイズについて比較検討した。図 3.14 は昭和 40 年 9 月 14 日の洪水の福知山地点における 1 時間先予測の例である。図中、 1σ error corridor とある部分は、予測値の $\pm 1\sigma$ の誤差範囲を示している。(A) の場合 (図 3.14(A)) のノイズの分散は、既往 5 洪水のピーク時の観測流量およびそれから逆算した各状態量の平均値の 10% の値を全期間一定として与えた。ただし、システムノイズの分散の値は $c_{pi} = 10.0$ ($i = 1, \dots, 6$) とし、 q_i で調整した。

(B) の場合 (図 3.14(B)) は、観測流量および状態量の 10% 程度の誤差を想定して 3.8.2 c) で述べたように $\alpha = 0.1, \beta = 0.1$ とした。両者を比較すると、予測値そのものに顕著な差はないが、(A) の場合は低水部の予測誤差 1σ の幅が大きく評価されてしまっている。低水時は誤差が相対的に予測誤差が小さく、ピーク付近では予測誤差が大きく評価される方が合理的であると言える。

本項での議論から、以後は、ノイズの統計量 (分散) は状態量に依存し時变的であるとする。

3.8.3 ノイズの分散の大きさと予測結果

3.8.2 の c) で述べたように、観測ノイズ・システムノイズの分散の大きさは、 α, β の値で定めることにしている。 α, β の値を試算的に替えて、予測がどのような挙動を示すかみてみよう。

図 3.14(C)~(E) は 同じ出水の福知山における 1 時間先予測の例である。ピーク直後の観測値と予測値との差と予測誤差 1σ の幅に注目する。(B) と (C) は、観測誤差は同程度 ($\alpha = 0.1$) とし、モデル誤差は (C) の方がより大きい ((B) $\beta = 0.1$, (C) $\beta = 0.3$) としたものである。両者の予測結果を比べてみると、 β の値の大きい方が、予測精度が悪い (すなわち、 1σ の幅が大きい) と評価される。ところが、予測値そのものは (C) の方がより観測値に近づく。つまり、システムノイズに比して、観測ノイズが相対的な意味で小さいので、毎時の観測値をより重視しているのであり、Kalman フィルターの性質をよく表していると言える。このように観測ノイズ・システムノイズの絶対的な大きさのみならず、それらの相対的な大きさに予測が依存するという事に留意しなければならない。

(C) の場合の観測ノイズをさらに小さくしてやると ($\alpha = 0.01$, 図 3.14(E)), さらに予測値は観測値に接近し、観測ノイズが小さい分だけ 1σ の幅もせまくなっている。(B) と (D) の結果を比較しても同様のことが言える。

また、12 時間目ぐらいで初めて観測値が得られているが、そのときの予測の修正の仕方を見ると、(B)、(C) に比して (D)、(E) の方が急激に修正している。これは観測ノイズを小さく見積もった場合の Kalman フィルターの特徴を表している。

図 3.14 の結果を見ると、ピーク直後の予測がすべての場合において下回っている。これは、もとの決定論的モデル (現行流出モデル) が、この洪水のピーク直後の流出現象を十分に記述できないことを示している。

観測誤差の大きさは流量観測ごとに本来異なる。また、(D)、(E) のように 1% 程度の観測誤差というのは、数百 km^2 以上の複合流域の観測所としては少し高精度すぎると言える。モデル誤差も、現状では 1 ~ 2 割は見ておく必要があろう。このようなことから、 $\alpha = 0.05 \sim 0.1, \beta = 0.1 \sim 0.2$ 程度の大きさとするのが妥当であると考えられる。

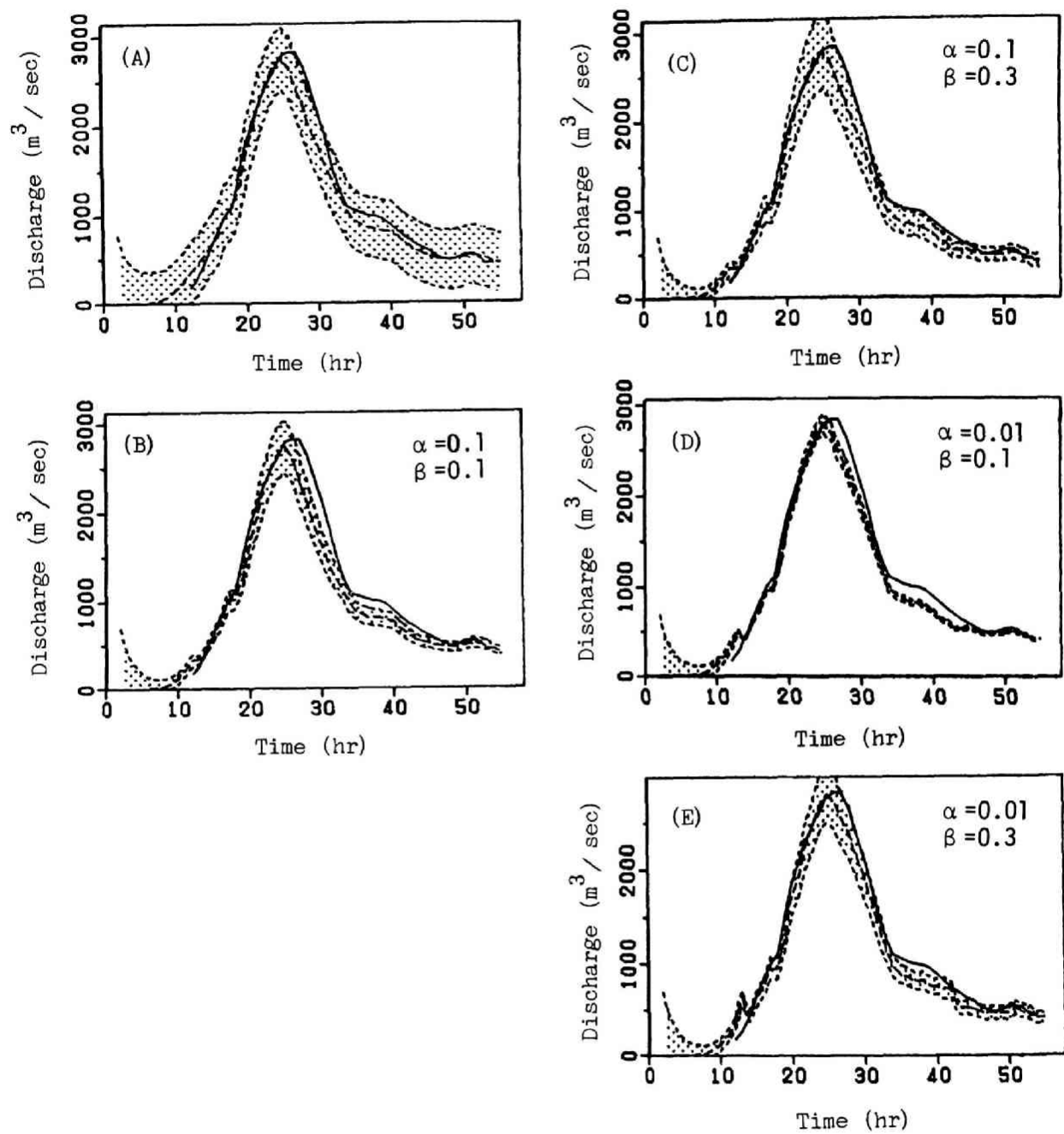


図 3.14: 由良川福知山地点の 1hr 先の予測

3.8.4 リードタイムと予測精度について

図 3.15 は、昭和 40 年 9 月 18 日の洪水の 1 時間以上先の予測を、基準地点である綾部 (A) と福知山 (B) について示したものである。それぞれ上段に予測誤差 1σ の幅を、下段には観測値・予測値と決定論的 Off-line 予測 (毎時の観測流量を利用しない) を示した。

リードタイムが長くなるほど 1σ の幅は当然大きくなる。図 3.15(B) の下段の第 1 ピーク以前を見ると、毎時の観測流量を用いる On-line 予測は、決定論的 Off-line 予測を直ちに修正していることがわかる (どちらも同一の初期条件を与えた)。ピーク付近では、低水位に比して観測誤差が相対的に大きいために、あまり観測値に追従しない結果となっている。すなわち、 $\alpha = 0.1$ としているので観測値には 10% 以内の誤差が含まれていると考えており、1 時間先の予測でも予測残差が観測値の 10% 程度であれば一応よしとしなければならない。図 3.15 の 3 ~ 4 時間先の予測は比較的適合度は良いと言える。

図 3.14 と 図 3.15 の結果を見て、1 時間先の予測残差に持続性があるという点から考えると、これらの予測は決して最適なものとは言えないのであって、モデル同定の不十分さを明示している。

現行流出モデルを改善するとともに、雨量・流量の観測精度を向上させることが重要である。また、数時間先の流出予測精度を上げるためには、それらに加えて精度の良い降雨予測が必要である。

3.8.5 まとめ

複数の分割流域からなる流域における洪水流出予測の一般的手法を展開し、由良川福知山上流域に適用した。筆者らの示した方法は、洪水流出のリアルタイム確率予測手法として有用である。

比較的短期間に状態量・出力の大きさが急激に変動する洪水流出のような現象を確率過程の状態空間モデルで表現するとき、付加されるノイズはその状態量・出力に依存すると考えた方が合理的である。

3.9 洪水流出の確率予測の意義

洪水流出の確率予測 (図 3.16) は、たとえば以下のように洪水予報に活用することができよう。図 3.17 は、雨が降り始めて数時間経過した時点 (その時刻を 3 時とする) における予測降雨 (の平均値) とそれに基づく予測流量を水位に変換したものを示す概念図である。この時点の予報としては、たとえば、“2 時間後に警戒水位を超える確率は 60%, 2 時間後では 80% である” とか、“4 時間後に計画高水を超える確率が 20% であるから、〇〇 地区の住民は直ちに避難せよ” などが可能である。何時間後に何 % になれば、どのような洪水予報を発するか、ということも当該流域の実情に即して検討してゆくべき課題となろう。

洪水流出の確率予測が高い精度で行われると、上述のようにより有効な洪水予報が可能となる。これは、河川管理者や住民が差し迫る豪雨・洪水災害に“いつも有機的に”対応できるための必要条件であり、その実現に向けて今後とも努力してゆく必要があると考える。

3.10 結 語

本論文では、洪水流出のリアルタイム予測と洪水予報に関して、三つの主題を取扱った。洪水流出のリアルタイム予測にフィルタリング・予測理論を適用した研究は多数あるが、個々の手法の位置づけが明確にされないまま今日にいたっている。そのため、それぞれの研究の趣意が広く一般に認識されないばかりでなく、研究者同士の間でさえ議論がかみ合わないというもどかしさがあった。そこで、まず従来の研究をレビューしたのち、それらの適用法を分類整理するとともに、筆者らの方法の意義を明らかにした。ここでの議論によりこの種の研究に対する考え方がすっきりし、判り易いものとなった。

次に、単一流域と複合流域の両方について、リアルタイム確率予測の実際的手法を具体的に提示した。実データへの適用例により本手法の有用性が明らかとなった。最近になって筆者らの方法の実務への適用が図られつつあるようである (星 (1988), 白木ら (1988), 角屋ら (1989))。

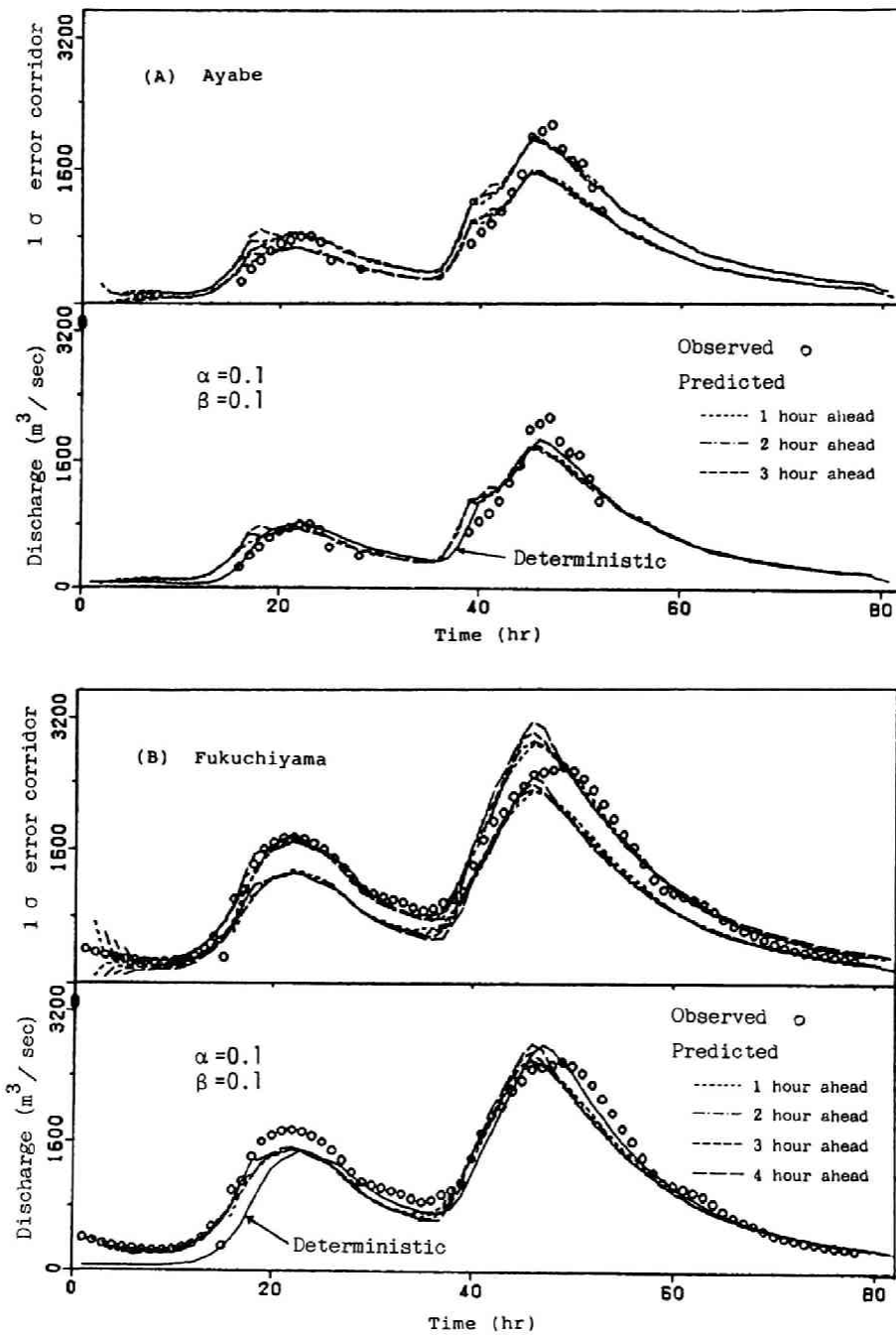


図 3.15: 綾部・福知山地点の予測 (1965 年 9 月 18 日の洪水)

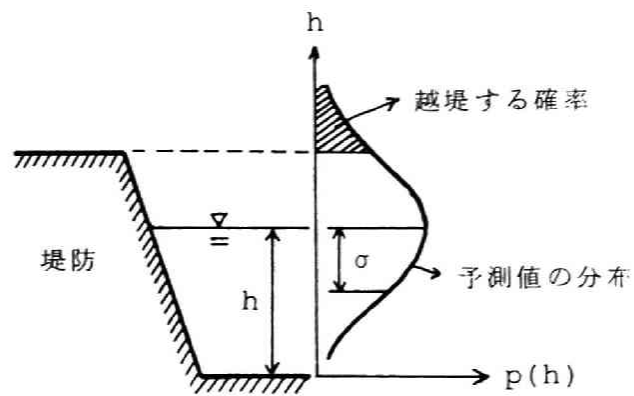


図 3.16: 洪水流出の確率予測

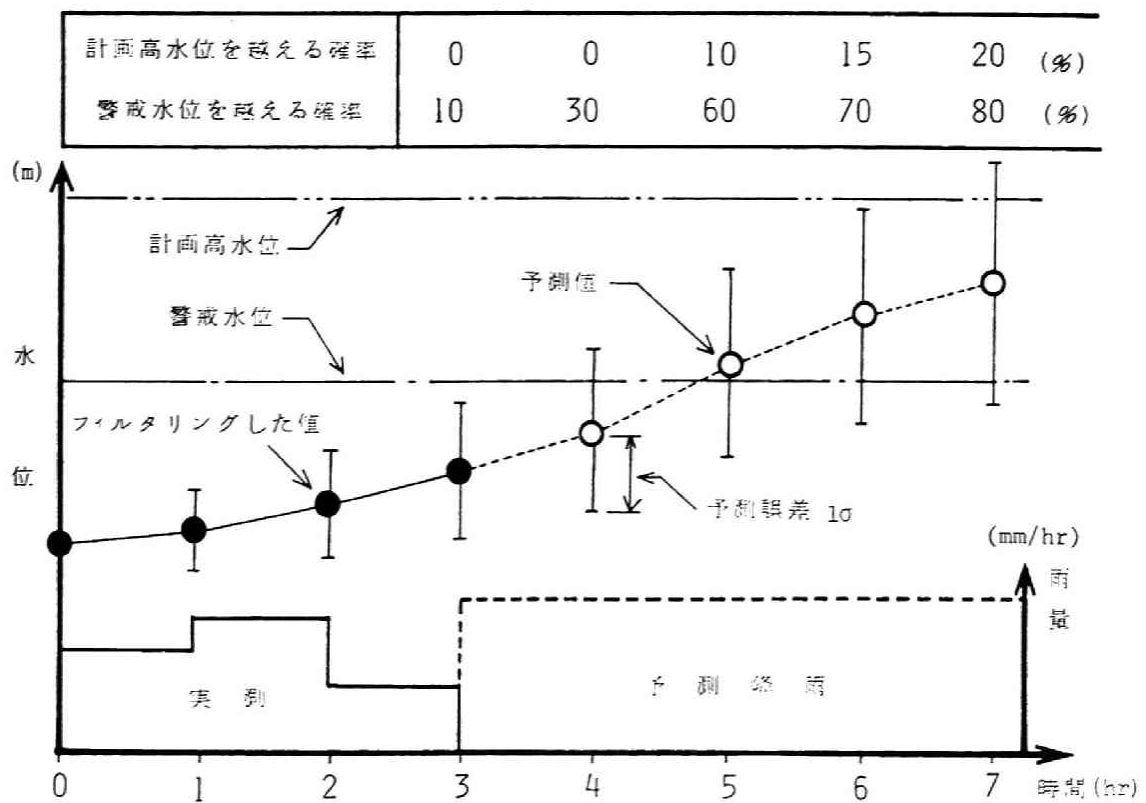


図 3.17: 洪水流出のリアルタイム予測の概念図

参 考 文 献

- Akaike, H. (1974): A New Look at the Statistical Model Identification, IEEE Trans. on Autom. Contr., AC-19, pp. 716-723.
- 有本 卓 (1977) カルマン・フィルター, 産業図書.
- Bierman, G.J., 1977. Factorization methods for discrete sequential estimation. Academic Press, New York, 241pp.
- Bolzern, P., M. Ferrario and G. Fronza (1980): Adaptive Real-Time Forecast of River Flow-Rates from Rainfall Data, Journal of Hydrology, Vol. 47, pp. 251-267.
- Chiu, C.-L., ed. (1978): Applications of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics and Water Resources, Proc. AGU Chapman Conf. held at Univ. of Pittsburgh.
- Gelb, A., ed. (1974): Applied Optimal Estimation, M.I.T. Press, 374pp.
- Hino, M. (1973): On-line prediction of hydrologic systems. In Proc. of the XVth Conference IAHR, Istanbul, pp. 121-129.
- 日野幹雄 (1974): 水文流出系へのカルマン・フィルター理論の適用, 土木学会論文報告集, 第 221 号, pp. 39-47.
- 日野幹雄・金 治弘 (1984): フィルター分離 AR 法とカルマン・フィルターによる洪水予測法に関する研究, 土木学会論文集, 第 351 号 /II-2, pp. 155-162.
- 星 清 (1988): 流出予測法の実例, 1988 年度 (第 24 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, A-3, 20pp.
- 星 清・山岡 勲・茂木映治 (1981): 流出予測における適応制御理論の応用に関する研究, 土木学会北海道支部論文報告集, II-17.
- Jazwinski, A.H. (1969): Adaptive Filtering, Automatica, Vol. 5, pp.121-126.
- Jazwinski, A.H. (1970): Stochastic Process and Filtering Theory, Academic Press, pp.121-126.
- Kadoya, M. and H. Tanakamaru (1988): Flood Runoff Forecasting with Long and Short Terms Runoff Model, Proc. 6th Congress of the Asian Pacific Regional Division, IAHR, Kyoto, Japan, Vol. I, pp. 183-190.
- 角屋 睦・田中丸治哉・永井明博・金口正幸 (1989): 愛知川上流域への長短期流出両用モデルの適用と実時間洪水予測, 水資源研究センター研究報告, 京都大学防災研究所, 第 9 号, pp. 45-60.
- 片山 徹 (1983): 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 198pp.
- 建設省土木研究所・下久保ダム工事々務所 (1962): 神流川流域水文観測資料, 233pp.
- 建設省近畿地方建設局福知山工事事務所・(株)日本水道コンサルタント (1982): 昭和 56 年度 由良川洪水流出モデル検討業務報告書.
- 木村俊晃 (1961, 1962): 貯留関数法, 土木技術資料, 3-12, 4-1, 4-4, 4-5, 4-6.
- 木下武雄 (1982): 洪水予報の最近の技術 — 利根川の洪水予報の例, 第 19 回自然災害科学総合シンポジウム講演要旨集, pp. 51-54.
- Kitanidis, P.K. and R.L. Bras (1980a): Real-Time Forecasting with a Conceptual Hydrologic Model, 1. Analysis of Uncertainty, Water Resources Research, Vol. 16, No. 6, pp. 1025-1033.
- Kitanidis, P.K. and R.L. Bras (1980b): Real-Time Forecasting with a Conceptual Hydrologic Model, 2. Applications and Results, Water Resources Research, Vol. 16, No. 6, pp. 1034-1044.

- Mehra, R.K. (1970):** On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering, IEEE Trans. on Autom. Cont., AC-15, pp. 175-184.
- 日本河川協会 (編) (1976): 建設省河川砂防技術基準 (案) 調査編, 建設省河川局 [監修], 山海堂, pp. 120-135.
- 西村克己・室田 明・江藤剛治 (1977): 貯留関数と カルマン・フィルターを組み合わせた 流出予測法の特性解析, 土木学会第 32 回年次学術講演会講演概要集第 2 部, II-86, pp. 161-162.
- 椎葉充晴 (1987): レーダ雨量計を利用した降雨の実時間予測と実時間流出予測手法, 1987 年度 (第 23 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, A-1, 18pp.
- Shiiba, M. and T. Takasao (1980):** Filtering and Prediction of Runoff Systems, Proc of the Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, IAHR, Tokyo, Japan, H. Kikkawa and Y. Iwasa, ed., pp. 83-93.
- 白木 亨・中村幾雄・岩永建夫 (1988): 電力ダム操作のための実時間確率出水予測モデルの実用化, 土木学会論文集, 第 399 号 /II-10, pp. 211-230.
- 砂田憲吾 (1982): 非定常流出系の実時間洪水流量予測, 第 26 回水理講演会論文集, pp. 379-385.
- 砂田憲吾・大沢健二 (1984): 実時間洪水予測に及ぼす流量観測および降雨予測精度の影響, 第 28 回水理講演会論文集, pp. 409-414.
- Takara, T., M. Shiiba and T. Takasao (1983):** A Stochastic Method of Real-Time Flood Prediction in a Basin Consisting of Several Sub-Basins, Journal of Hydrosience and Hydraulic Engineering, JSCE, Vol. 1, No. 2, pp. 93-111.
- 宝 馨・高棹琢馬・Barriga, J.A. (1987): Kalman フィルタを用いた流出予測における 状態量とノイズ項の取り扱いについて, 第 31 回水理講演会論文集, pp. 113-118.
- 宝 馨・高棹琢馬・椎葉充晴 (1984): 洪水流出の確率予測における実際的手法, 第 28 回水理講演会論文集, pp. 415-422.
- 高棹琢馬 (代表) (1982): 集中豪雨災害の予知と対策, 文部省科学研究費自然災害特別研究研究成果, 自然災害科学総合研究班, pp. 41-54.
- 高棹琢馬・永末博幸 (1982): 淀川水系における洪水の予知・予報と今後の展望について, 第 19 回自然災害科学総合シンポジウム講演要旨集, pp. 47-50.
- 高棹琢馬・椎葉充晴 (1979): 流出システムのフィルタリングと予測, 第 16 回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集, pp. 133-136.
- 高棹琢馬・椎葉充晴 (1980a): 状態空間法による流出予測 —kinematic wave 法を中心として—, 京都大学防災研究所年報, 第 23 号 B-2, pp. 211-226.
- 高棹琢馬・椎葉充晴 (1980b): 流出システムのフィルタリングと予測 (第 2 報), 第 17 回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集, pp. 213-216.
- Takasao, T. and M. Shiiba (1984):** Development of Techniques for On-Line Forecasting of Rainfall and Flood Runoff, Natural Disaster Science, Vol. 6, No. 2, pp. 83-112.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1981): 確率論的な流出予測に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第 24 号 B-2, pp. 125-142.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1982a): 集中型流出モデルの構成と流出予測手法, 京都大学防災研究所年報, 第 25 号 B-2, pp. 221-243.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1982b): 貯留モデルによる実時間流出予測に関する基礎的研究, 京都大学防災研究所年報, 第 25 号 B-2, pp. 245-267.

- 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1982c): 洪水流出の確率予測におけるモデルと手法, 第 19 回自然災害科学総合シンポジウム講演要旨集, pp. 63-66.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1983): 複合流域における洪水流出の確率予測手法, 京都大学防災研究所年報, 第 26 号 B-2, pp. 181-196.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1984): リアルタイム洪水予測のソフト・システム, 第 21 回自然災害科学総合シンポジウム講演要旨集, pp. 303-306.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨 (1985): リアルタイム洪水予測のモデルと手法, 水資源研究センター研究報告, 京都大学防災研究所, 第 5 号, pp.19-31.
- Takasao, T., M. Shiiba and K. Takara (1989): Stochastic State-Space Techniques for Flood Runoff Forecasting, Proc. of Pacific International Seminar on Water Resources Systems, T. Takasao, ed., pp. 117-132.
- 高棹琢馬・椎葉充晴・富澤直樹 (1984): 統計的二次近似理論を適用した流出予測システムの構成, 京都大学防災研究所年報, 第 27 号 B-2, pp. 255-273.
- 高棹琢馬・宝 馨・三谷裕次郎 (1989): 洪水予測精度向上のためのレーダー雨量の逐次補正について, 第 33 回水理講演会論文集, pp. 103-108.
- 高棹琢馬・宝 馨・三谷裕次郎・笛田俊治 (1988): レーダー雨量の逐次補正とその洪水予測への適用, 京都大学防災研究所年報, 第 31 号 B-2, pp. 241-254.
- Todini, E. (1978): Mutually Interactive State-Parameter (MISP) Estimation, in Applications of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics and Water Resources.
- 戸川隼人 (1973): 微分方程式の数値計算 — 有限要素法と差分法 —, オーム社, p. 47.
- Wood, E.F., ed. (1980): Real-Time Forecasting/Control of Water Resources Systems, Selected Papers from an IIASA Workshop, Oct. 18-20, Pergamon Press, 330pp.
- Wood, E.F. and Szöllösi-Nagy, A. (1978): An Adaptive Algorithm for Analyzing Short-Term Structural and Parameter Changes in Hydrologic Prediction Models, Water Resources Research, Vol. 14, No. 4, pp. 577-581.
- 由良川洪水予報連絡会 (1981): 由良川洪水史, 254pp.

第 3 編

利水用貯水池システムの信頼性評価に関する研究

第1章

概説 — 水資源システムの性能評価の基本的考え方

1.1 水資源システムとその計画・管理

1931年に提示された Horton の水文循環の概念は地球上の水の挙動を一つの大きな closed system として捉えたものであり、水循環システム（あるいは水文システム）と呼ぶことができよう。この大きなシステムの中で、われわれ人間は水とともに生存しているものであり、水の量と質がわれわれの生存する条件を規定していることから、その水に対して何らかの価値観が認識される。すなわち、水は人間の生存のための“資源”であるという認識である。人間活動の観点から水を捉えるとき、“水資源 (water resources)”という言葉は何の抵抗もなく受け入れられるであろう。水資源システムとは、地球上の大きな水循環システムの中における人間と水との関わりの場と定義できる。

水資源システムの計画・管理の目的は、端的に言えば、水の量と質を適切に確保・制御して、人間活動が快適に行われ得るようにすることである。したがって、水資源システムの性能は、この快適さの度合によって評価されることになる。ここで問題なのは、水資源システムが、降水・流出・地下水といった自然条件のみならず、人間活動の多種多様性および時代的な要請の変化といった社会条件をも包含するものであり、非常に難解な代物であるということである。自然条件の諸要素が時間的・空間的に大きく変動すること自体が難解な事柄である上に、社会条件が多目的性格をもつことがその取り扱いを一層困難にしているのである。

水資源システムの計画・管理の内容は、大雑把に言えば、量的なものとして治水（治水計画・洪水制御）、利水（水資源の開発と供給）、質的なものとして環境保全（水質基準と汚濁の防止・下水道など）に分けられる。これらは、もちろん、たがいに関連し合うものであり、それらを総合的に取り扱うべきものである。

わが国では、昭和 53 年（1978 年）に第三次全国総合開発計画が策定され、これを踏まえて昭和 65 年（平成 2 年、1990 年）を見通した“長期水需給計画”が国土庁により策定され、また、建設省では、“昭和 65 年にむけての水資源開発計画と水利用”が発表された（建設省河川局（1979））。その後、国土庁では、昭和 62 年 10 月に、水需給の動向ならびに水資源をめぐる新たな諸状況の変化を踏まえ、同年 6 月の第四次全国総合開発計画と整合をとりつつ、“全国総合水資源計画（ウォータープラン 2000）”を策定した（国土庁長官官房水資源部（1988）、水資源協会（1989））。これは、先の“長期水需給計画”が目指した水需給の長期的安定化の理念を基本的に継承しつつ、水資源を単に水量だけでなく、水質、環境機能等多面的な視点から総合的に捉えようとするもので、西暦 2000 年を目標年次としている。その基本目標として、以下のようなものが掲げられている。

- 水の安定供給体制の整備
- 渇水に対する水供給の安定度の向上
- 新しい水活用社会の形成

こうした基本計画に基づいて各地域（それぞれの自治体あるいは河川流域という比較的狭い地域、場合によっては複数の水系にまたがる広い地域）において、水資源システムの計画・管理が行われる。この際、システム論的アプローチが、水資源システムの分析・計画・管理において有用な（情報を提供する）手法である。昭和 56、57 年の 2 か年にわたって、土木学会関西支部に学・官・民からの 20 名の委員からなる“水資源の高度利用に関する研究委員会”（委員長・高棹琢馬京都大学教授）が設けられ、水資源システムの分析・計画・管理および保全に関する諸問題と最近のシステム論的アプローチがレビュー・整理され、将来展望が提示されている（土木学会関西支部（1983））。

1.2 水資源システムのシステム論的アプローチ

水資源システムにシステム工学的手法が導入され始めたのは、1955年から60年頃にかけてのHarvard大学の水資源研究グループによる“Harvard Water Program”からであると言われる。システム工学的手法とは、序論の2.2でも述べたように、対象とするシステムの数学的定式化、目的関数の設定、最適解の抽出という手順を踏むものであり、可能な限りの代替案を列举し、コンピュータを駆使して線形計画法(LP, linear programming)、非線形計画法(NLP, nonlinear programming)、動的計画法(DP, dynamic programming)、シミュレーションなどの数学的技法を用いて目的関数の最適化を行うもので、これにより得られる予測結果に基づいて、所与の制約条件のもとで目的を達成するのに最も望ましいと思われる判断(意志決定)を行う。こうした手法の水資源システムへの適用は、その後、アメリカを中心としておびただしい数のものがある。わが国では、高棹・瀬能(1970)のダム群による洪水制御へのDPの応用に関する研究を契機として、春名・岡田(1973)、竹内(1974)、室田・江藤(1974)、高棹・池淵・小尻(1975, 1978)、吉川・岡田(1976)、室田・神田(1976)、関・鳥越(1976)、高棹・池淵(1977)、長尾(1977, 1984)、吉川ら(1978)、三好ら(1978)、小尻(1980)、中川(1984)などの研究が鋭意進められた。

システム工学的手法はその間大いに発展し、土木計画の分野では“システムズアナリシス”として体系化されている(たとえば、吉川(1980))。

システムズアナリシスの定義は、

複雑な問題を解決するために意志決定者の目的を明確に定義し、代替案を体系的に比較評価し、もし必要とあれば新しく代替案を開発することによって、意志決定者が最善の代替案を選択するための助けとなるよう設計された体系的な方法である。

とされており、(1)問題の明確化、(2)調査、(3)分析、(4)予測、(5)代替案の設計、(6)分析結果の解釈と評価、という過程を繰り返す循環的手順を踏む。

こうしたシステム論的アプローチが、本来多目的で広域的な水資源システムの工学的観点からの分析・計画・管理に有効である。内外の多数の研究については、池淵(1980, 1987)、小尻(1980)や竹内(1982, 1985)によってレビューされている。Cohon and Marks(1975)は多目的計画法について、Yakowitz(1982)はDPについてレビューしており、さらに、Yeh(1985)はこれらを含む広範なレビューを行っている。

人間活動が高度に発達した現代の水資源システムに内在する問題は複雑性・多面性・広範性をもっている。水資源に関わる利害主体が多岐にわたるとともに、現象(自然的・社会経済的な)のメカニズムが非常に複雑である。その問題を単純な形で定式化し何らかの最適解を見いだすのはなかなか難しいと言える。したがって、システムズアナリシスのような総合的な手法が必要となるわけであるが、問題を構造化・階層化することにより、いくつかの基本的部分に分割することも可能である。こうして各部分・各階層のある程度単純化された小問題を解き、次にこれら相互の関連を組み込んで全体システムとして問題を再構成する。このようなフィードバック(分析と総合と言い換えることができよう)を繰り返してより良い解を見いだしてゆくことが、大規模で複雑なシステムを取り扱うためのいわば順当な方法であると言えよう。

1.3 水資源システムの性能評価の手法と規準

水資源システムの計画・管理の目的は、端的に言えば、水の量と質を適切に確保・制御して、人間活動が快適に行われ得るようにすることであり、その快適さの度合いがその水資源システム(および計画・管理の方法)の性能の良否を表す。さて、“快適さの度合”といっても曖昧であり、何らかの客観的・定量的な指標(評価規準)によりシステムの性能の評価を行うことが、計画・管理に携わる主体(為政者)にとっても、また、計画・管理下に置かれる者(地域住民)にとっても有益である。

1.3.1 安全性・信頼性によるシステムの評価

序論の2.1で述べたように、治水システムでは確率洪水概念が計画の基本となっている。すなわち、たとえば100年確率洪水を基本とする計画とは、100年に1回生起する程度の規模の洪水に耐えうる性能をもつ治水システムを作りますよ、ということである。すなわち、そのような異常な洪水の生起頻度、生起確率が一つの判り易い客観的・定量的な指標となる¹。利水システムでも同様であり、わが国では、利水計画の対象の渇水規模を10年に1回程度のものとしている。表1.1は、欧米の計画対象の渇水規模を示したものの²で、わが国の場合はフランスと同じで

¹ただし、その定量化の方法(確率洪水の値の決め方)には問題があるので、第1編で合理的な方法を提案したのである。

²昭和63年版日本の水資源—その開発、保全と利用の現状—(国土庁長官官房水資源部編)による。

表 1.1: 海外の計画対象渇水に関する計画基準例 [国土庁長官官房水資源部 (1988)]

表-26 海外の計画対象渇水に関する計画基準例

国名 (機関名)	計画対象の渇水規模	計画の考え方等	出典等
アメリカ開拓局 (1950, 1971)	既往最大渇水	・都市用水と工業用水は常に満足されるよう供給配水 ・かんがい用水では渇水時における水不足も許容	「計画手引書」 1950 「水資源開発事業の計画」 1971
アメリカ工兵隊 (1984)	約20年に1回以上	・貯水池の規模は左記の渇水に若干の余裕をみる	「小規模水道事業の設計の手引」 1974
カリフォルニア州水資源局 (1974)	既往最大渇水	・最大渇水期間の1928～34年及び最大渇水年1924年、1931年を含む、1922～54年で施設計画	「カリフォルニア州水資源計画」 1974
英国 (イングランド、ウェールズ) Wessex 水管理庁	50年に1回		「Wessex 水管理庁報告」 1985
Anglian 水管理庁	既往最大渇水	・供給目標水準は左記の渇水に若干の余裕をみる	Anglian 水管理庁
フランス	10年に1回		「フランス水白書」 1977
オランダ	既往最大渇水 1976年 (1/50相当)		公共事業道路省 水資源計画部

あるが、他の国に比べて小さい規模である。こうした規模の差異は、彼我の自然的・社会経済的条件によるものであって、日本やフランスの利水システムが不十分であるということにはならない。要するに、洪水や渇水の生起確率が、水資源システムの性能を評価する最も基本的な指標の一つであるということである。

洪水や渇水は人間に対して何らかの経済的、人的あるいは心理的被害を与えるものであり、こうした被害が小さく済むようなシステムが望ましい。すなわち、安全な、信頼できるシステムが望ましい。上記の生起確率も安全性・信頼性を示す一つの指標にはかならない。

JIS によれば、信頼性 (reliability) とは、“系、機器、部品など (これらは総称して item と呼ばれる) の機能の時間的安定性を表す度合または性質”と定義されており、また、信頼度 (同じく reliability) とは“item が規定の条件下で意図する期間中規定の機能を遂行する確率”であると定義されている³。信頼性に関する研究は、1930 年代の航空機の事故率、故障率の研究、第 2 次世界大戦中のドイツやアメリカにおけるロケットやレーダーなどの軍事機器 (特に電子機器に使われる真空管) の信頼性向上の研究を経て、1960 年代のアメリカにおける宇宙開発 (アポロ計画) の成功により信頼性工学が揺るぎない地位を得た。わが国では、1952 年頃から電話自動交換器の改良、1961 年頃から航空機や国鉄新幹線などで信頼性の研究が行われ始めたようである。

システムの計画・設計時には、システムの信頼度を予測しなければならない。信頼度予測とは、JIS の定義によれば、“item の信頼性特性値を設計時に定量的に見積ること”である。機器や部品の信頼度予測のための故障モデルがいくつか提案されている。また、設計されたシステムや機器の弱点を把握し、必要に応じて改善を加えるための信頼度解析手法として FEMA (Failure Mode and Effect Analysis) と呼ばれるものがある。また、トップ事象に重要な故障モードを取り上げて、故障の要因を図式に展開する解析方法として、FTA (Fault Tree Analysis) がある (たとえば、牧野・野中 (1983))。これらは比較的新しい手法であり、水資源システムへの適用として、池淵・白村・宮川 (1988) は渇水の構造特性の分析に FTA を導入しており、また、石原 (1988) は洪水災害の生起構造を FTA により概念的に分析し、fail-safe と safe-fail の考え方⁴の洪水災害防止システムにおける有用性を述べている。

³ 英語では reliability の 1 語であるが、日本語では信頼性、信頼度と呼び分けている。

⁴ fail-safe の設計原理とは、簡単に言えば、システムの一部が故障してもそれに代わるサブシステムが働いて、安全に目標に到達できるようにすることであり、この設計方式は 1930 年代の航空機の信頼性設計に遡ることができる。

1.3.2 システムの信頼性の評価規準

さて、水資源システム（特に治水システム）においては、前述のように、洪水の非超過確率あるいはリターンピリオドといった概念で、米国では1914年頃から、わが国では1949年頃からシステムの安全性・信頼性を暗に考慮してきたわけである（すなわち、非超過確率を信頼性特性値の一つと捉えたことになる）。“安全度”という言葉が論文の表題として登場するのは、広田（1970）、藤吉（1971）あたりからであり、“信頼度”は室田・江藤・吉岡（1974）に見られる。ちょうどアポロ計画の成功によりわが国で信頼性工学の有用性が喧伝されてすぐの頃である。

1978年には、カナダのWaterlooで、International Symposium on Risk and Reliability in Water Resourcesが開かれている（McBean et al. (1979)）。Water Resources Research, Vol. 18, No. 1 (1982)では、“Risk and Uncertainty in Water Resources Management”の特集が組まれている。その中で、Hashimoto et al. (1982)は、水資源システムの性能を評価する三つの規準（reliability, resiliency, vulnerability）を提案した。これらは、その後しばしば用いられているようであり（Duckstein and Plate (1987)）、わが国では、池淵・小尻らが利水安全度評価に用いている（池淵ら（1987）、小尻ら（1987））。以下にこれらの定義を簡単に述べておこう。

a) reliability (信頼度)

時点 t ($t = 1, 2, 3, \dots$)におけるシステムの出力の状態が確率変数 X_t によって表されるとしよう。一般に、 X_t のとりうる値は、二つの集合 S と F に分けられる。すなわち、 S はすべての満足すべき出力の集合であり、 F はすべての不満足な（失敗の）出力の集合である。どの時点においてもシステム出力がこれらのうちの一方の要素になると仮定しよう。システムの信頼度はシステムが満足すべき状態にある頻度あるいは確率 α として次のように表される。

$$\alpha = \text{Prob}[X_t \in S] \quad (1.1)$$

信頼度の別の定義は、ある一定期間（しばしば計画期間にとられる）に一度も失敗が起こらないような確率である。もし計画期間が単一期間であれば両者は等しくなる。

信頼度は、水資源計画で広く使われる概念である。また、信頼度は、リスク（risk, 危険度）の逆にとられることもある。すなわち、リスクあるいは失敗の確率は単に $1 - \alpha$ である。

b) resiliency (回復度)

回復度⁵は、一旦失敗が起こってしまったときに失敗からいかに迅速に回復する（立ち直る）かを表すものである。もし失敗が長引く事象でありシステムの回復がゆっくりしていれば、このことはシステムの設計において重大な意味をもつであろう。満足な状態へ直ちに回復できるようなシステムを設計することが望ましいのである。Hashimoto et al. (1982)はこの回復度と信頼度との関係を論じているが、簡単には、次の定義で十分である。

$$\gamma = \text{Prob}[X_{t+1} \in S | X_t \in F] \quad (1.2)$$

失敗 $X_t \in F$ とそれに続く成功 $X_{t+1} \in S$ の生起が統計的に独立であれば、回復度と上記の信頼度とは一致する。

c) vulnerability (深刻度)

vulnerabilityを直訳すると、傷つき易さ（脆弱性）である。したがって、脆弱度と訳してもよいと思われるが、その内容はシステムの失敗の深刻さを表すものであり、池淵らは“深刻度”と訳している（池淵ら（1987）、小尻ら（1987））。脆弱であればあるほどより深刻な被害を受けるのであるから、ここでも池淵らにならって深刻度という言葉を用いる。 X_t が離散的な値 x_1, x_2, \dots, x_n のどれかをとるとする。システムが不満足な状態にあるとき（ $X_t = x_j \in F$ ）、この x_j の値に対応する何らかの深刻さの定量的指標を s_j とし、 e_j を x_j の起こる確率とすれば、深刻度は次式で与えられる。

$$\nu = \sum_{\{j | X_t = x_j \in F\}} s_j e_j \quad (1.3)$$

1.3.3 その他の性能評価の規準

前節で述べた確率概念を持ち込んだ規準以外にも次のようなものが考えられる。

- 対象期間内の失敗の発生回数（信頼度と関連）

⁵池淵らはresiliencyをこのように訳した。

表 1.2: 利水安全度指標の定義 [建設省 (1983)]

利水安全度指標	定 義	利水安全度指標	定 義
渇水の発生頻度	貯水池必要容量の超過確率で表現する。すなわち貯水池（必要）容量 V の計算対象期間（ T 年間）中の大きい方からの順位を n とすれば渇水の発生頻度 $= n/T$	貯水池容量不足 発生日数	設定した貯水池容量のもとで計算対象期間を通したダム補給計算を行い貯水池の残貯留量が 0 となる日数を D 日とすれば 貯水池容量不足発生日数 $= D/T$
不足率・日	ダム補給計算を行い対象期間の各時期における取水制限率の累加値の年平均値を求める。すなわち 不足率・日 $= 1/T \sum S_i = 1/T \sum (Q_i - W_i)/Q_i \times 100$ S_i : 取水制限率 Q_i : 計画確保流量 W_i : 実確保流量	渇水被害関数	ダム補給計算を行い次式によって求める 渇水被害関数 $= 1/T \sum (S_i)^2 \times Q_i$
(不足率) ² ・日	ダム補給計算を行い取水制限率の 2 乗値の累加値を次式によって求める (不足率) ² ・日 $= 1/T \sum (S_i)^2 = 1/T \sum \{ (Q_i - W_i)/Q_i \times 100 \}^2$	渇水被害額	渇水被害額は次式によって算出する 渇水被害額 $= 1/T \sum_k \sum_i \{ (Q_i^k - W_i^k) \times D_k(S_i^k) \}$ ここで S_i^k , Q_i^k , W_i^k はそれぞれ第 i 日における利水目的 k （農業用水、上水、工業用水）の取水制限率、計画確保流量、および実確保流量であり、また $D_k(S_i^k)$ は取水制限率 S_i^k に対する利水目的 k の渇水被害原単位である

- 失敗の継続時間（回復度と関連）
- 被害額（洪水や渇水、水質汚濁などによる被害を経済的指標に換算する。）
- 計画基準値との差や比（たとえば、不足率や超過量など）
- 氾濫面積（洪水の場合）

これらは、深刻度の中の s_j に組み込むことも可能である。

要するに、水資源システムの性能評価の規準の要件としては、計量のし易いこと、客観的であること、分かりやすいことなどが挙げられよう。

1.4 利水安全度

この第 3 編では、利水の問題を取り扱うので、利水システムの性能評価についてここでもう少し議論しておこう。

“利水安全度”という言葉が使われたしたのは、1970 年頃のことと思われるが、藤吉 (1971) は次のように記している。

利水計画の安全度：ダム等の水資源開発施設は、下流の基準地点における流況を平滑化して、渇水時にもできる限り確保流量（維持流量・既得用水・新規用水）の取水を可能にするために建設される。

利水計画の安全度とは、設定した確保流量が確保可能な確からしさをいう。

一般に、ある一定の容量をもつ開発施設に対して確保流量を大きくすると安全度は低下し、逆に安全度をできるだけ高くしようとすれば確保流量を小さく設定せざるを得ない。

安全度は、どのような基準によって評価されるべきかは政治・社会・経済の観点から考慮しなければならない問題である。

その後、浜口 (1977)、宮田・竹内 (1978)、中川 (1978, 1984)、土木研究所 (1979)、大内・佐々木・松下 (1982) などが利水安全度について論じている。表 1.2, 表 1.3 は、建設省（河川局河川計画課・土木研究所 (1983, 1986)）による利水安全度指標の分類である。上に引用したものは、利水計画の安全度（“計画安全度”）であるが、いま一

表 1.3: 利水安全度指標の分類 [建設省 (1986)]

渇水の発生頻度を 表わす指標	第 1 群	渇水の「頻度」を 表わす指標	(1) 渇水の発生頻度 (2) 貯水池容量不足発生年数 (3) 取水制限実施年度
渇水の程度を 表わす指標	第 2 群	渇水の「長さ」を 表わす指標	(4) 貯水池容量不足発生日数 (5) 取水制限実施日数 (6) 渇水被害原単位による重みづけ不足日数
	第 3 群	渇水の「大きさ」を 表わす指標	(7) 総不足水量 (8) 貯水池不足容量 (9) 不足%・日
	第 4 群	渇水の「厳しさ」を 表わす指標	(10) 最大取水制限率 (11) (不足%) ² ・日 (不足%) ³ ・日 (12) 渇水被害関数 (13) 渇水被害原単位による重みづけ不足%・日
	第 5 群	渇水の「経済的被害」 を表わす指標	(14) 渇水被害額 (15) 単位水量あたりの渇水被害額

つ別の形態の安全度が存在することにも留意しなければならない。それは、“管理安全度”と呼ばれるもので、中川らの定義によれば、

管理安全度：計画通りの利水が可能でない状態において、開発施設の運用や節水などによって許容流量（固守目標）を充足する、すなわち水の不足による被害が許容限度以下にできる確からしさ。

である（池淵（1988））。

池淵と岡田は、利水システムと安全度について、安全度の評価指標、リスク分析的見方、利水安全度問題の階層構造など多角的な観点から整理を行っている（池淵（1988））。

後に続く二つの章では、利水システムの信頼性について検討する。すなわち、第 3 編 第 2 章では管理安全度について、第 3 編 第 3 章では計画安全度の向上について、福岡市域を対象として検討を加える。

参 考 文 献

- Cohon, J.L. and D.H. Marks (1975): A Review and Evaluation of Multiobjective Programming Techniques, Water Resources Research, Vol. 11, No. 2. pp. 208-220.
- 土木学会関西支部 (1983): 水資源システムの分析・計画・管理および保全に関する最近の技術, 昭和 58 年度講習会テキスト, 191pp.
- Duckstein, L. and E.J. Plate, ed. (1987): Engineering Reliability and Risk in Water Resources, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.
- 藤吉三郎 (1971): 利水計画の安全度に関する二、三の考察 — 利根川水系を例として —, 土木学会誌, 第 56 巻, 第 11 号, pp. 23-29.
- 浜口達男 (1977): 利水の安全度からみた貯水池容量の決定方法に関する研究, 第 31 回建設省技術研究会報告, pp. 683-688.

- 春名 攻・岡田憲夫 (1973): 広域利水における水配分計画モデルに関する一考察, 土木学会論文報告集, 第 211 号, pp. 63-76.
- Hashimoto, T., J.R. Stedinger and D.P. Loucks (1982): Reliability, Resiliency, and Vulnerability Criteria for Water Resource System Performance Evaluation, Water Resources Research, Vol. 18, No. 1, pp. 14-20.
- 広田泰久 (1970): 利水の安全度について, 第 24 回建設省技術研究会報告.
- Hoshi, K., S.J. Burges and I. Yamaoka (1978): Reservoir Design Capacities for Various Seasonal Operational Hydrology Models, 土木学会論文報告集, 第 273 号, pp. 121-134.
- 池淵周一 (1980): 水資源開発と渇水コントロール, 1980 年度 (第 16 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, A-5, 29pp.
- 池淵周一 (1987): 渇水をめぐる諸問題, 1987 年度 (第 23 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, A-2, 17pp.
- 池淵周一 (代表) (1988): 水資源システムにおける安全度概念の定式・定量化と計画論への応用に関する総合的研究, 昭和 61・62 年度科学研究費補助金 (総合研究 (A)) 研究成果報告書, 158pp.
- 池淵周一・小尻利治・武村彰文 (1987): 確率マトリックス演算による利水システムの安全度評価, 京都大学防災研究所年報, 第 30 号 B-2, pp. 359-375.
- 池淵周一・白村 暁・宮川裕史 (1988): FTA による渇水の構造特性, 京都大学防災研究所年報, 第 31 号 B-2, pp. 297-315.
- 石原安雄 (1988): 洪水災害防止における FAIL-SAFE と SAFE-FAIL, 京都大学防災研究所年報, 第 31 号 B-2, pp. 369-377.
- 神田 徹 (1975): 水資源計画における貯水池最適操作に関する研究, 大阪大学学位論文, 237pp.
- 建設省河川局 (編) (1978): 昭和 65 年にむけての水資源計画と水利用, 日本河川協会, 67pp.
- 建設省土木研究所 (1979): 渇水被害の計測について, 土木研究所資料, 第 1502 号, 73pp.
- 建設省河川局河川計画課・建設省土木研究所 (1983): 利水安全度に関する研究, 第 37 回建設省技術研究会報告, pp. 553-619.
- 建設省河川局河川計画課・建設省土木研究所 (1986): 渇水時における 水供給施設の最適運転手法 に関する研究, 第 40 回建設省技術研究会報告, pp. 544-593.
- 吉川秀夫・吉川勝秀 (1982): 計画超過渇水を考慮した水資源計画に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 319 号, pp. 153-165.
- 小尻利治 (1980): ダム貯水池群による水量・濁質制御に関するシステム論的研究, 京都大学学位論文, 137pp.
- 小尻利治・池淵周一・飯島 健 (1987): 利水システムの安全度評価に関する研究, 土木学会論文集, 第 381 号 / II -7, pp. 91-100.
- 国土庁長官官房水資源部 (編) (1988): 昭和 63 年版日本の水資源 — その開発, 保全と利用の現状 —, 大蔵省印刷局, 282pp.
- 牧野鉄治・野中保雄 (1983): 信頼性工学, 日科技連, 194pp.
- McBean, E.A., K.W. Hipel and T.E. Unny (Eds.) (1979): Reliability in Water Resources Management, Water Resources Pub., 407pp.
- 宮田信一・竹内清文 (1978): 利水安全度に関する一考察, 第 32 回建設省技術研究会報告, pp. 570-576.

- 三好逸二・関 正和・吉川勝秀・朴 栄秀 (1978): 流域における水循環の把握と水資源の配分に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 269 号, pp. 121-133.
- 水資源協会 (編) (1989): '89 水資源便覧, 国土庁長官官房水資源部 [監修], 山海堂, 518pp.
- 室田 明・江藤剛治 (1974): 利水を目的とした貯水池の貯留・調節機能に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 222 号, pp. 57-67.
- 室田 明・江藤剛治・吉岡正道 (1974): 水文資料に起因する水資源計画の信頼度について, 土木学会論文報告集, 第 222 号, pp. 69-77.
- 室田 明・神田 徹 (1976a): 利水用単一貯水池の最適操作計画に関する方法論, 土木学会論文報告集, 第 246 号, pp. 83-92.
- 室田 明・神田 徹 (1976b): 水量と供給信頼度を評価基準とする貯水池の流量調整機能の解析, 土木学会論文報告集, 第 250 号, pp. 47-62.
- 長尾正志 (1977): 利水用貯水池の取水機能の信頼性評価に関するマルコフ連鎖理論の応用, 第 21 回水理講演会論文集, pp. 133-141.
- 長尾正志 (1984): 貯水池による水量制御の信頼性評価, 1984 年度 (第 20 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, A-1, 20pp.
- 中川芳一 (1978): 利水安全度の評価について, NSC(日本水道コンサルタント) 研究年報.
- 中川芳一 (1984): 水資源の開発・配分計画に関するシステム論的研究, 京都大学学位論文, 161pp.
- 大内忠臣・佐々木 元・松下越夫 (1982): 利水安全度問題に関する 2, 3 の分析と考察, 土木技術資料, 24-1.
- 関 正和・鳥越一成 (1976): 流域における合理的な水資源の計画・管理に関する一方法論, 土木技術資料, 18-11, pp. 553-558.
- 高棹琢馬・池淵周一 (1977): 水の需給構造に関するシステム・ダイナミックス論的研究, 土木学会論文報告集, 第 259 号, pp. 55-70.
- 高棹琢馬・池淵周一・小尻利治 (1975): 水量制御からみたダム群のシステム設計に関する DP 論的研究, 土木学会論文報告集, 第 241 号, pp. 39-50.
- 高棹琢馬・池淵周一・小尻利治 (1978): 多ダム・多評価地点系の最適操作に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第 21 号 B-2, pp. 193-206.
- 高棹琢馬・瀬能邦雄 (1970): ダム群による洪水調節に関する研究 (I)—DP の利用とその問題点—, 京都大学防災研究所年報, 第 13 号 B, pp. 83-103.
- 竹内邦良 (1974): 貯水量の累加損失係数を用いた 貯水池群の最適操作手法, 土木学会論文報告集, 第 222 号, pp. 93-103.
- 竹内邦良 (1982): 渇水持続曲線による渇水時水文特性の把握と水管理への応用に関する研究, 東京大学学位論文, 233pp.
- 竹内邦良 (1985): 水資源の最適管理 —DCL 手法による貯水池操作—, 1985 年度 (第 21 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, A-9, 17pp.
- Yakowitz, S. (1982): Dynamic Programming Applications in Water Resources, Water Resources Research, Vol. 18, No. 4, pp. 673-696.
- Yeh, W.W.-G. (1985): Reservoir Management and Operations Models— A State-of-the-Art Review, Water Resources Research, Vol. 21, No.12, pp. 1797-1818.
- 吉川和広 (1980): 土木計画のシステム分析, 技報堂出版, 271pp.

吉川和広・岡田憲夫 (1976): 非線形計画モデルによる 1 水系流域における広域的・多角的水配分問題に関する一分析, 土木学会論文報告集, 第 247 号, pp. 83-95.

吉川和広・岡田憲夫・大内忠臣 (1978): 1 水系流域における水利用システムの段階的規模拡張方式, 土木学会論文報告集, 第 274 号, pp. 105-117.

第2章

利水用貯水池システムの操作方式とその評価

近年頻繁に各地で渇水が生起している。表 2.1 は、わが国の主な水系における渇水の発生状況を取りまとめたもの（昭和 63 年版日本の水資源）であるが、特に最近では毎年のように渇水に見舞われている。わが国の年平均降水量は減少傾向にあり、また年平均気温は上昇傾向が見られる。これは地球規模での気候変動に起因するとも言われ、異常気象に関する報告が次々と発表されている（たとえば、気象庁（1984）や松野・新田（1989））。昨年（1988 年）4 月から 6 月にかけてアメリカ中西部の穀倉地帯で 1934 年以来という大干ばつに見舞われたが、これは“ブロッキング”という現象によるものであることがわかっている。また、有名なエルニーニョ現象のメカニズムもかなり解明されてきているようである。人間活動の高度の展開による大気中の二酸化炭素の増加が原因で起こる“温室効果”が世界的な気温の上昇を招いているといわれ、ごく最近では大気中のオゾンを破壊するフロンガスのような物質の使用を極力抑制するような配慮がなされつつあることは注目値する。こうした地球規模での現象の解明とその対策は、気象学・地球物理学などの研究に負うところが大きく、観測・情報交換の技術と体制のますますの発展とあいまって、今後さらに大きな人類の課題となることは必定である。水問題を取り扱うわれわれにとっても大いに関わっていかねばならない分野であろう。

こうした状況を踏まえて、以下では、計画規模を超えるような渇水にどのように対処するか、という点について検討する。水資源システムにおける利水の問題は、“いかに渇水を起こさないようにするか”あるいは“たとえ渇水が起こったとしても、いかに被害を小さくするか”ということであり、渇水対策は、利水システムの計画・設計・拡張といったハードな対策と利水システムの制御・運用というソフトな対策の二つに大別できる。

こうした対策により、用水の時間的配分、空間的配分、用途間配分の適正化を図るのが利水計画である。水量が流域（水資源システム）内に常に豊富にある場合は、必要な時に必要な場所・使用者に十分に供給することができるので、これらの配分はあまり問題にならない。急峻な山地をもつ島国であるわが国のような地形条件においては、流域内の水量は降水量に大きく依存する。わが国の年降水量・月降水量の変動が比較的大きく、前述のように近年各地で渇水が頻発している状況である。

渇水時すなわち限られた水量のもとでは、空間的配分・用途間配分といった問題は、適正な時間的配分のなされた後に考慮されるべきであり、流域全体での時間的配分がいわば上位の問題となる。したがって、この場合には問題が単純化できて、流域内の貯水池群を単一のダム貯水池として取り扱うことができる。降水量の年変動・月変動はかなり大きいので、降水量（ダム操作の場合は、それに基づくダムへの流入量）の確率変動をも考慮しなければならない。こうした条件で有用な基本的な手法は確率 DP と呼ばれるものである。

この章では、まず、ケーススタディとする流域の概要と、確率 DP の定式化と解法を述べる。次に、現在の利水システムの条件の下で制御を確率 DP で最適化した場合にどのようなシステム性能をもちうるのか、すなわち、システムの管理安全度を、前章で述べたようなシステムの信頼性の指標によって評価する。特に、最適化の際に用いる評価関数（目的関数）としてどのようなものが望ましいかを検討する。さらに、計画規模を超えるような渇水に対してどのような貯水池操作を行えばよいか検討する。

2.1 本章の目的

貯水池操作の問題に動的計画法（DP, dynamic programming）を適用した研究は Little（1955）以来非常に多くのものがある。Yakowitz（1982）や Yeh（1985）は、それらの総括的なレビューを行っている。

わが国では、高樺・瀬能（1970）によるダム群による洪水制御への適用が草分けであり、その後、高樺・池淵・小尻（1972, 1975, 1978, 1979）、竹内（1974）、神田（1975）などが続いた。

表 2.1: 既往の著名な渇水 [国土庁長官官房水資源部 (1988)]

年	地 域		給 水 制 限		備 考
	都 市 名	主要河川	期 間	日 数	
S. 39	東 京 都	多 摩 川	7. 10～ 10. 1	84日間	東京五輪渇水
S. 42	北 九 州 市	遠 賀 川	6. 19～ 10. 26	130 "	
	筑 紫 野 市	筑 後 川	9. 5～ 9. 26	22 "	
	長 崎 市		9. 25～ 12. 5	72 "	長崎渇水
S. 48	松 江 市	斐 伊 川	6. 20～ 11. 1	135 "	
	大 竹 市	小 瀬 川	7. 27～ 9. 13	49 "	
	高 松 市		7. 13～ 9. 8	58 "	高松砂漠
	那 覇 市 他		11. 21～翌9. 24	239 "	
S. 52	淀川沿川都市	淀 川	8. 26～ " 1. 6	134 "	
	那 覇 市 他		4. 27～ " 4. 7	176 "	
S. 53	淀川沿川都市	淀 川	9. 1～ " 2. 6	159 "	
	北 九 州 市	遠 賀 川	6. 8～ 12. 11	173 "	
	福 岡 市	筑 後 川	5. 20～翌3. 24	287 "	福岡渇水
S. 56	那 覇 市 他		7. 10～ " 6. 6	326 "	
S. 59	蒲 郡 市 他 (豊川用水地域)	豊 川	10. 12～ " 3. 13	154 "	
	東 海 市 他 (愛知用水地域)	木 曾 川	8. 13～ " 3. 13	113 "	
	淀川沿川都市	淀 川	10. 8～ " 3. 12	156 "	
S. 61	蒲 郡 市 他 (豊川用水地域)	豊 川	8. 28～ " 1. 27	153 "	
	東 海 市 他 (愛知用水地域)	木 曾 川	9. 3～ " 1. 26	146 "	
	淀川沿川都市	淀 川	10. 17～ " 2. 10	117 "	
S. 62	東 京 都 他	利 根 川 ・ 荒 川	6. 16～ 8. 25	71 "	首都圏渇水
	蒲 郡 市 他 (豊川用水地域)	豊 川	8. 24～翌5. 23	274 "	
	東 海 市 他 (愛知用水地域)	木 曾 川	9. 12～ " 3. 17	188 "	

表 2.2: 年間の放流目標の決定に関する従来の研究

	システム	評価関数	単位期間
中村 (1976)	単一貯水池 (残流域あり) 貯水池群 (2 ダム)	(不足量)×(不足率)	1 か月
建設省土木研究所 (1979)	単一貯水池	渇水被害関数	1 か月
中川 (1984)	貯水池群 (3 ダム)	(不足量) ²	1 か月
富田・竹内・山本 (1984)	単一貯水池	(不足率) ²	1 か月

流入量の確率変動を考慮する場合には確率 DP (stochastic dynamic programming) が有用であり、年間の貯水池放流目標量の決定問題にこれを用いたものには、中村 (1976)、建設省土木研究所 (1979)、富田ら (1984)、中川 (1984) がある。これらを比較したのが表 2.2 である。

ここで注目したいのは、それらの研究がそれぞれ異なった評価関数を用いていることである。ある評価関数を設定して、それに関して貯水池の操作ルールを最適化し、それに基づいて種々の分析を行うといった内容であるが、そのルールは設定された評価関数に対して最適なかただけであって、後述するように、別の評価関数を用いれば全く異なるルールが得られる。

この点に着目し、本章では、最初からある特定の評価関数を設定するのではなく、種々の評価関数を取り上げて、それぞれに対して最適なルールを求め、それらのルールのうちどれが最も当該流域に望ましいものであるかを検討する¹。すなわち、最も望ましいルールを得るために選ぶべき評価関数は何か、ということを明らかにしようとする。これが本章前半の目的である。

また、平時 (渇水でないとき) は、こうして得た最も望ましい操作ルールに基づいて、水量制御を行えばよいが、渇水が予測されるとき、あるいは、既に渇水に陥ってしまったときは、そのような操作ルールに従って貯水池の操作を実行すると短時間のうちに貯水池が枯渇し甚大な被害を生み出すことになる。したがって、渇水時には別のルールに切り替え被害を軽減する必要がある。本章のもう一つの目的は、こうした渇水時の最適な操作方法を見いだすことである。

2.2 対象流域と水文データ

ケース・スタディとして福岡市域を取り上げる (図 2.1)。この地域が昭和 53 年 (1978 年) に未曾有の大渇水に見舞われ、甚大な被害を受けたことはあまりにも有名である。以下、確率 DP を適用する上で必要な諸元、データについて簡単にまとめておく。ただし、取り扱いの便宜上、かなり大胆な仮定・簡略化を行っていることを予め断っておく。

2.2.1 時間単位について

年間の利水用貯水池操作の最適化を行うにあたり、月単位の操作を考える。よって、流入量、水需要量、水供給量 (放流量) などはすべて月単位の量を取り扱う。

2.2.2 貯水容量について

当時、福岡市が水利権をもつ貯水池は、久原、江川、南畑、背振、曲淵、瑞梅寺の 6 ダムで (表 2.3)²、福岡市上水分の総貯水池容量は、約 1,980 万 m³ であった。また、夏期洪水期には洪水調節のために利水容量が 100 万 m³ 減少するが、この分も特に考慮しない。これらの貯水池をすべて合算して単一のダムとみなす。以後、水量の離散化の単位は百万 m³ とし、この仮想ダムの貯水容量は年間通じて一定の 20 百万 m³ とする。

¹ただし、ここで言う“操作ルール”とは、ある一定期間 (後の適用例では月) の最初の貯水池の貯水量によって、その期間の目標放流量を決めるといういわゆるルールカーブである。

²実際には、渇水時にのみ水補給を行う寺内ダムがあるがここでは便宜上その存在は考えない。

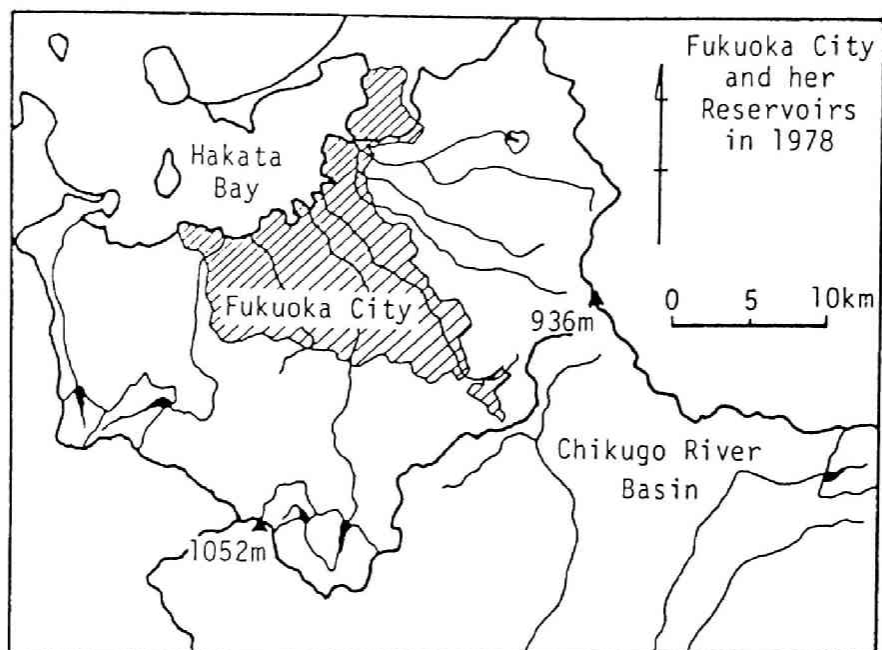


図 2.1: 昭和 52 年の福岡市周辺図 [Takeuchi (1986)]

表 2.3: 福岡市が水利権をもつ貯水池

ダム名	完成年	有効貯水量 (万 m ³)	集水面積 (km ²)	福岡市上水分 (万 m ³)
久原	1970	146.0	0.9	140.0
江川	1972	2400.0	30.0	806.0
南畑	1966	456.0	22.0	312.0
背振	1976	439.0	5.5	439.0
曲淵	1922	236.8	11.4	236.8
瑞梅寺	1977	227.0	7.2	42.3
合 計		3904.8	77.0	1976.1

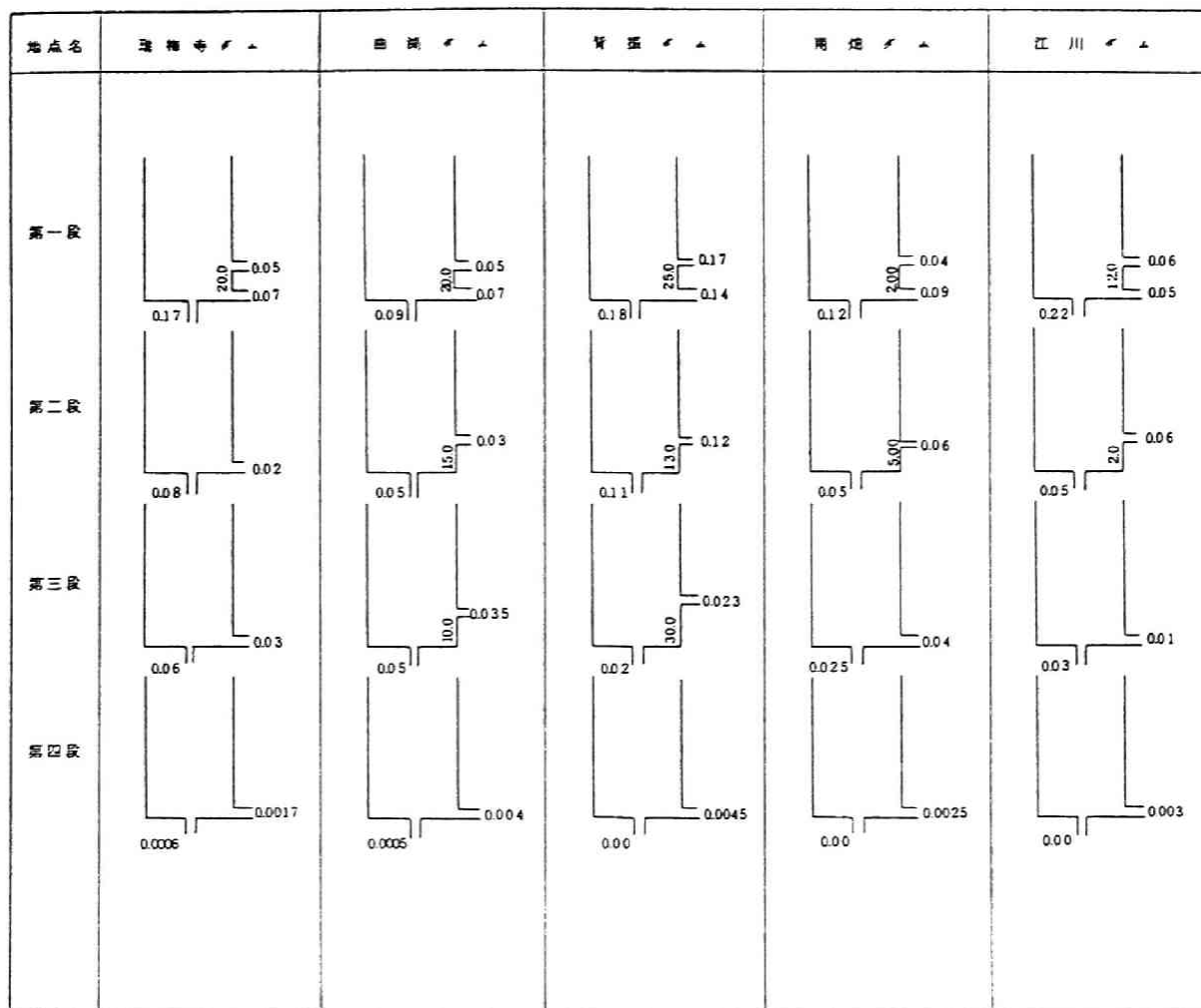


図 2.2: 各ダム流域のタンクモデル [水利科学研究所 (1980a)]

2.2.3 流入量について

水利科学研究所 (1980a) は、1978 年の福岡渇水時の利水操作に関する検討を行っており、その報告書の中に以下の諸量が与えられている。

- 江川、南畑、背振、曲淵、瑞梅寺の 5 ダム流域の流出計算用のタンクモデル (図 2.2)
- 日単位蒸発散量 (表 2.4, 月ごとに一定値)
- 福岡地点の月降水量のヒストグラム (1900–1978 年の 79 年間)

これらの情報から、月流入量の系列を求めるのに以下のような手順によることにした。

Step 1) 福岡地点の各月降水量に 2 母数対数正規分布をあてはめる (図 2.3, 2.4)。

Step 2) 上記の分布に基づき、正規乱数を利用して M 年間の月降水量系列を発生させる。各月降水量は互いに独立であると仮定する。

表 2.4: 月別蒸発散量 [水利科学研究所 (1980a)]

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
日蒸発散量 (mm)	1.2	1.7	2.4	2.8	3.5	3.6	4.5	4.5	3.0	2.4	1.9	1.3

表 2.5: シミュレーションによる 1 万年の流入量系列の統計量

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均	4.60	4.33	4.73	6.59	5.84	14.54	14.00	7.62	11.43	6.54	4.34	4.32
標準偏差	2.71	2.51	3.22	4.43	4.91	11.33	10.82	6.96	8.12	5.26	2.77	2.43
変動係数	0.59	0.58	0.68	0.67	0.84	0.78	0.77	0.91	0.71	0.80	0.64	0.56
自己相関係数	0.27	0.19	0.18	0.19	0.12	0.25	0.36	0.19	0.37	0.45	0.29	0.01

表 2.6: 福岡市水道局浄水場合計取水量 (1977 年)

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
取水量	30.2	33.1	33.2	33.7	34.3	36.0	41.8	39.4	39.4	36.7	34.5	34.9

(単位: 万 m^3 /日)

Step 3) 各ダム流域の降水量は福岡地点の降水量に比例すると仮定する。比例定数は、水利科学研究所 (1980a) の報告書に記された値を用いる。

Step 4) 月降水量を日降水量に配分する。この配分の仕方を三通り考える。少雨継続 (毎日同じ降水量が降り続く)、中雨断続 (三日雨三日晴れ)、多雨断続 (三日雨七日晴れ) の 3 パターンである。

Step 5) それぞれのパターンの日雨量の系列を M 年間分それぞれのダム流域のタンクモデルに入力する (日蒸発散量は表 2.4 の値を差し引く)。各ダム流域ごとに三つのパターンで得られる流量を合算して日流入量の系列とし、月流入量を求める。

Step 6) 各ダムの月流入量の系列を合算する。

$M = 10,000$ 年のこのようなシミュレーションによって得た各月流入量のヒストグラム (経験分布) は、図 2.5 のようになった。また、この月流入量系列の基本統計量 (平均値、標準偏差、変動係数、ラグ 1 の自己相関係数) は、表 2.5 のようである。連続する二つの月流入量の相関 (ラグ 1 の自己相関係数) は、最大でも 10 月と 11 月の相関が 0.45 であり、0.2 前後の値がほとんどである。よって、月流入量の系列は独立とみなすことにする。

結局、月流入量は、図 2.5 の経験分布に従い、0 ~ 40 百万 m^3 の 41 段階の値をとるものとする。

2.2.4 水需要量について

1977 年の福岡市水道局浄水場の月別合計取水量 (表 2.6) と、1976 年の上水道一人当たり取水量のダムと河川への依存量の比 (水経済年報 1980 年版 (水利科学研究所 (1980b))) を基にして、1 月から 12 月までそれぞれ、6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 7, 7, 7 百万 m^3 とした。

2.3 確率 DP モデルの定式化

2.3.1 モデルの変数とその変数間の関係

本章では、以下の記号を用いて確率 DP の定式化を行う。

入力変数 $X(i)$: i 期の貯水池への流入量 (確率変数);

状態変数 $S(i)$: i 期首の貯水池の貯水量;

決定変数 $G(i)$: i 期の貯水池からの目標放流量;

出力変数 $K(i)$: i 期の貯水池からの実際の放流量;

制約定数 V : 貯水池の貯水容量;

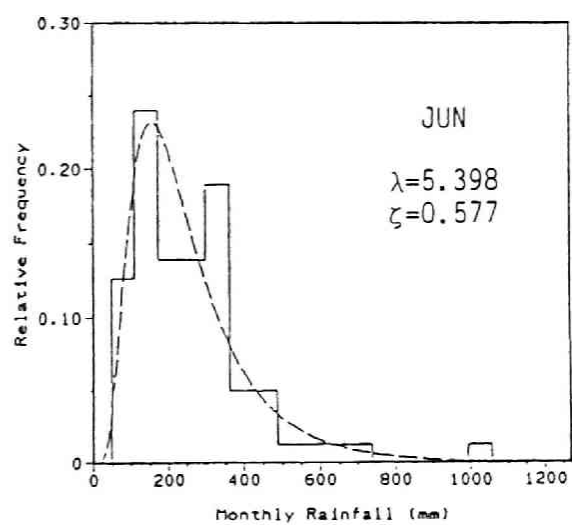
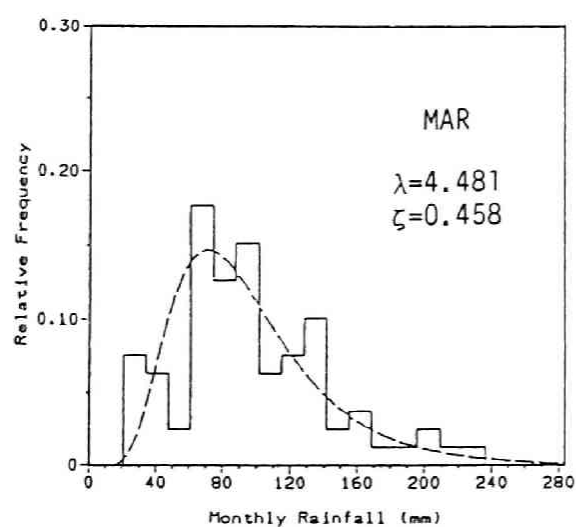
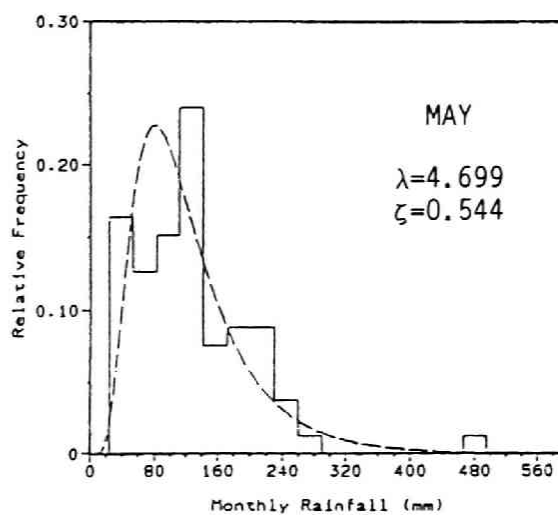
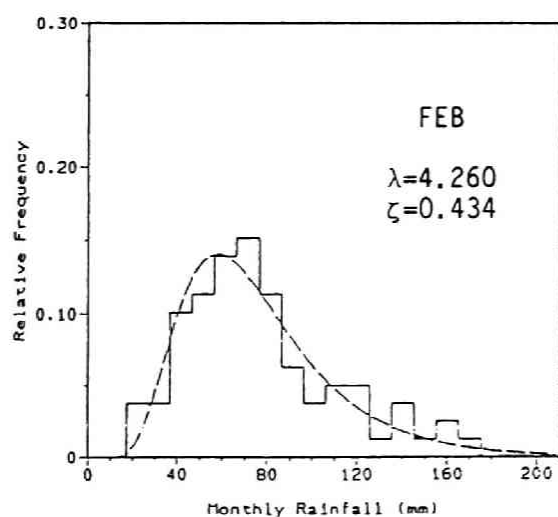
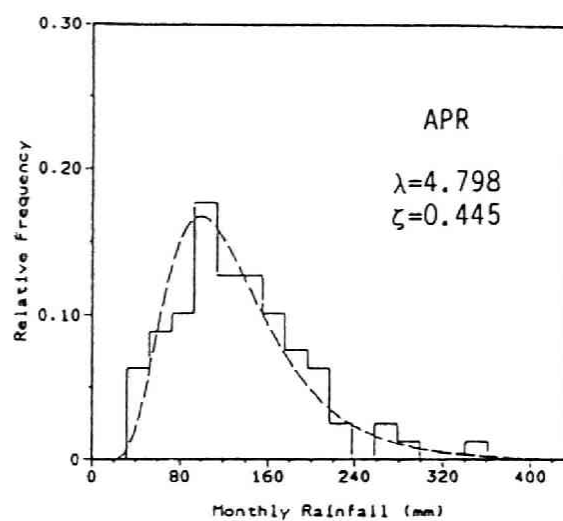
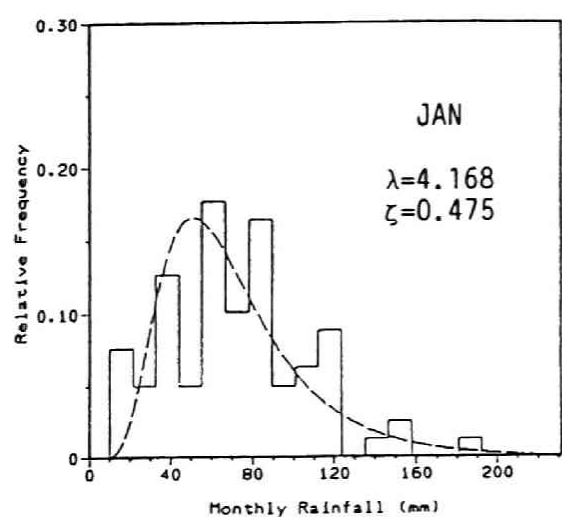


図 2.3: 月雨量のヒストグラムとあてはめた対数正規分布 (1月から6月)

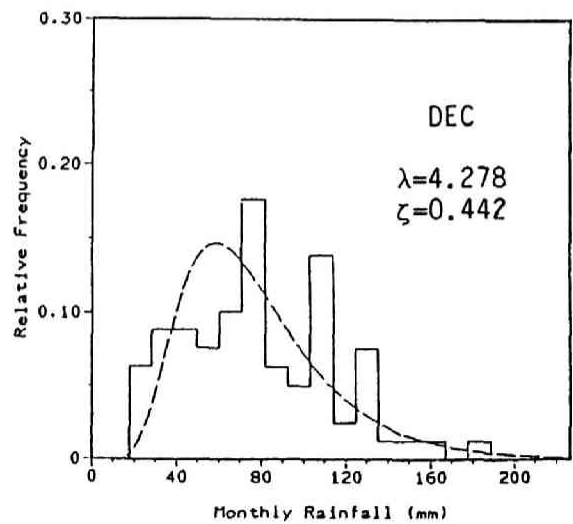
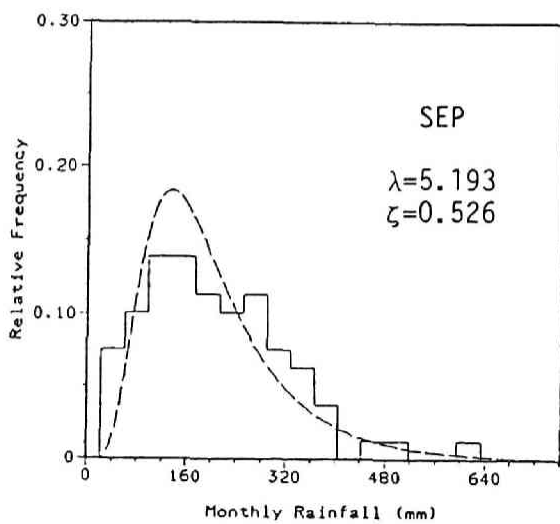
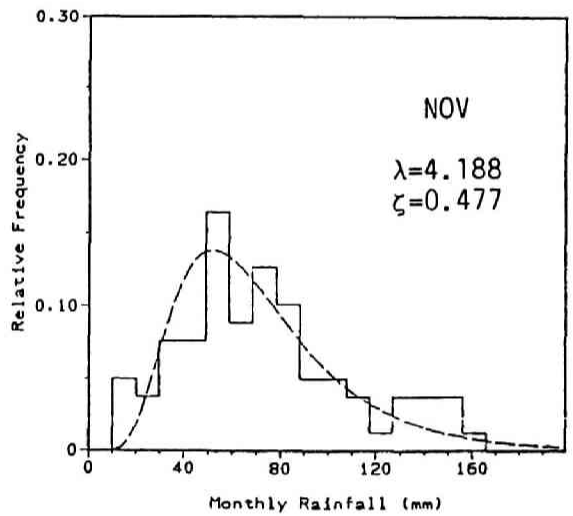
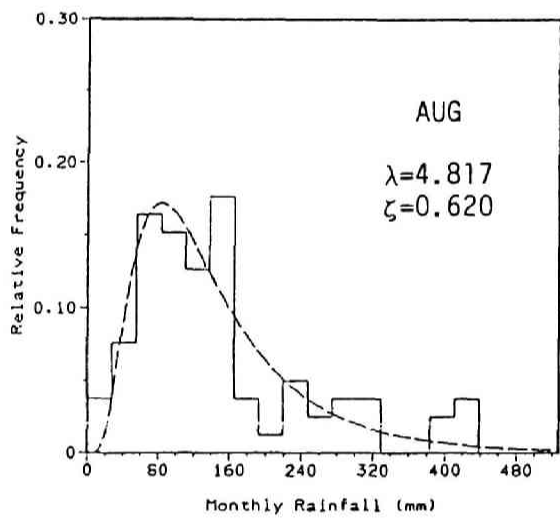
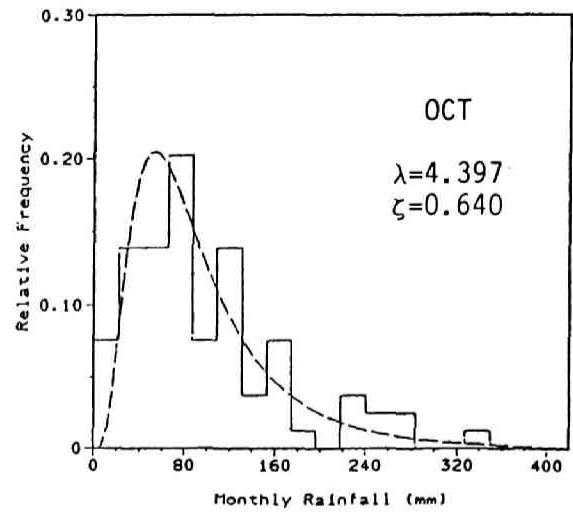
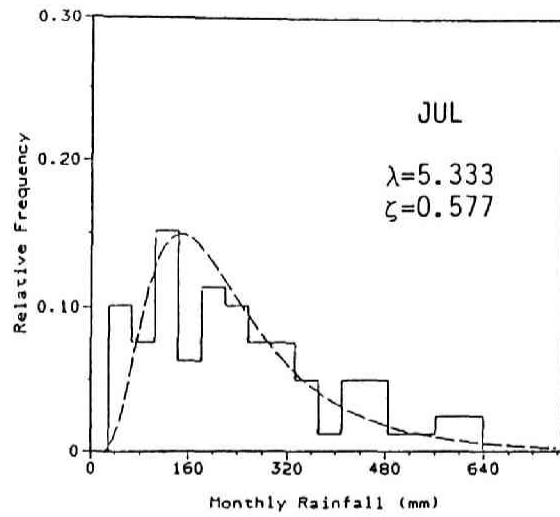


図 2.4: 月雨量のヒストグラムとあてはめた対数正規分布 (7月から12月)

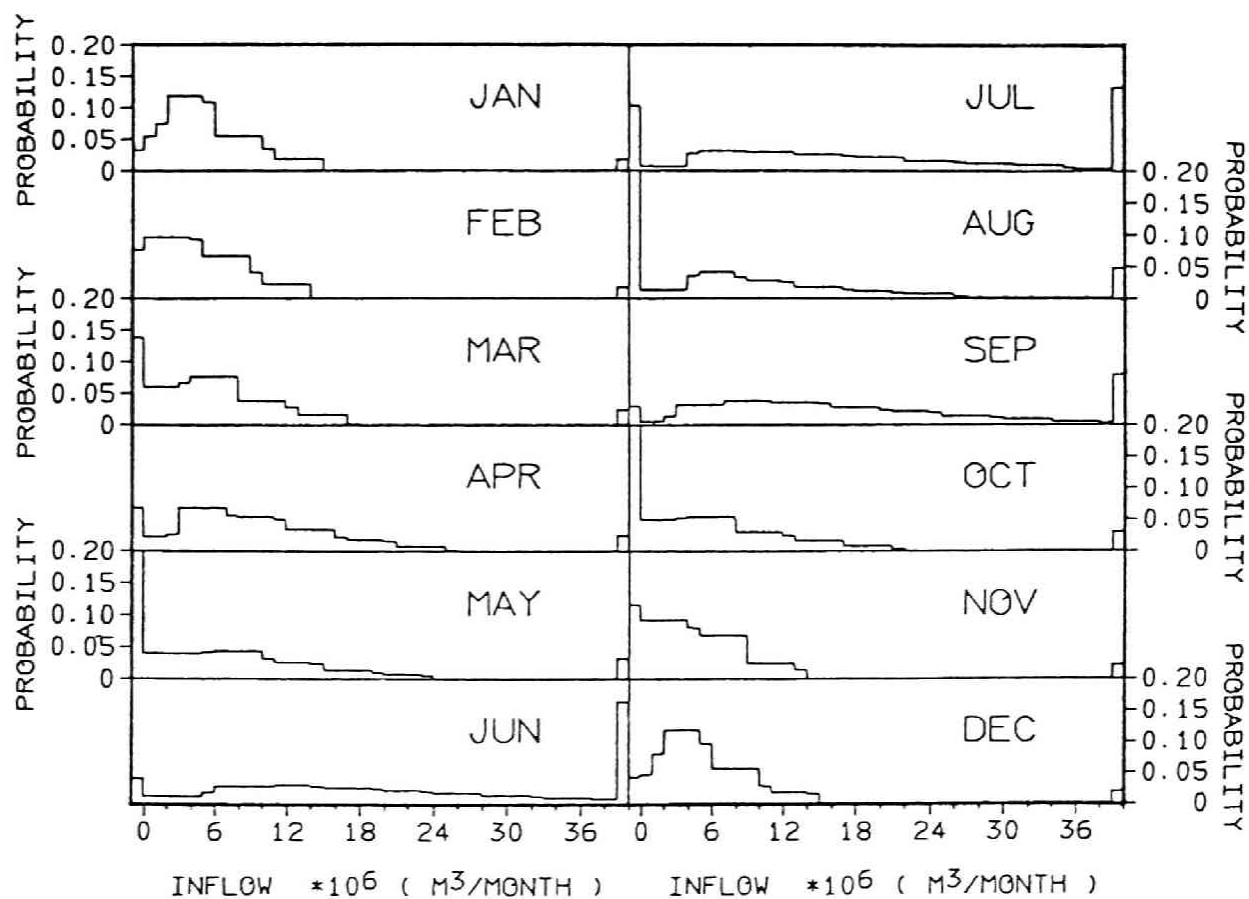


図 2.5: 月流入量の経験分布 [Takasao and Takara (1988)]

需要変数 $D(i)$: i 期の水の需要量。

水量は百万 m^3 単位, 時間は 1 か月単位で, 時間的に早い方の月から $1, 2, \dots, i, j, \dots, N$ と期の番号を付ける ($i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1$)。第 i 期首の貯水量 $S(i)$ と, 第 j 期首 (つまり第 i 期末) の貯水量 $S(j)$ との間に以下の連続式が成り立つとする。

$$S(j) = S(i) + X(i) - K(i) \quad (2.1)$$

ここで, 放流量 $K(i)$ は, 貯水量 $S(i)$, 流入量 $X(i)$, 貯水容量 V および目標放流量 $G(i)$ によって決定されるものとし, 次の放流ルールに従うものとする。

$$K(i) = \begin{cases} S(i) + X(i) & : S(j) = 0 \quad \text{if } \theta(j) \leq 0 \\ G(i) & : S(j) = \theta(j) \quad \text{if } 0 < \theta(j) < V \\ S(i) + X(i) - V & : S(j) = V \quad \text{if } \theta(j) \geq V \end{cases} \quad (2.2)$$

(2.2) 式は, 目標放流量を放流すると仮定したときの i 期末 (j 期首) の仮想貯水量 $\theta(j) (= S(i) + X(i) - G(i))$ を求め, この $\theta(j)$ が負となり, 目標放流ができない場合は放流できるだけ放流し, $\theta(j)$ が V を越える場合は目標放流量以外に無効放流が生じ, それ以外の場合は目標放流量を放流するというものである。

2.3.2 関数方程式と目標放流量の決定

第 i 期において状態変数, 入力変数がそれぞれ $S(i), X(i)$ であるときに $K(i)$ なる決定を下した場合, その期で生じる損失 (以後, 直接損失と呼ぶ) を $L_i(K(i); S(i), X(i))$ と記す。また, 第 i 期において状態変数, 入力変数がそれぞれ $S(i), X(i)$ であるときに, 以後最終の第 N 期まで最適な決定を行った場合の, 第 i 期より第 N 期までの間の最小累加損失 (以後, 累加損失と呼ぶ) を $f_i(S(i))$ と記すことにする。いま, $P_i(X(i))$ を第 i 期において入力変数 $X(i)$ の実現する確率とすれば, 累加損失 $f_i(S(i))$ は, 次式のように定式化できる。

$$f_i(S(i)) = \min_{K(i)} \left[\sum_{X(i)} \{L_i(K(i); S(i), X(i)) + f_j(S(j))\} p(X(i)) \right] \quad (2.3)$$

すなわち, $f_i(S(i))$ は, 第 i 期に生じる直接損失 L_i と第 j 期 (第 $i+1$ 期) 以降最終期までの最小累加損失 f_j との和の期待値の最小値である。最終期から出発して 1 期ごとに $f_i(S_i)$ を後進型で計算し, (2.3) 式の右辺を最小とするような $K(i)$ (これが目標放流量 $G(i)$ となる) を決定していく。

以上のようにして計算された最適放流目標を貯水池の状態に応じて逐次選んでいけば, 第 i 期から最終期 (第 N 期) までの渇水被害を最小にできる。なお, 計算を行う際は, 最終期 N を十分大きくとって始め, 年間を通しての決定変数と状態変数の組合せ $(G(i), S(i))$ が定常状態となれば計算の終わりとする。すなわち, ここで言う“操作ルール”とは, 月初めの貯水量によって, その月の目標放流量を決めるというものである。

具体的な手順は次のようである。

Step 1) まず, i 期の状態変数 $S(i)$ を設定する。

Step 2) 次に, 出力変数 $K(i)$ を設定して, (2.3) 式の大括弧の中の和 (すなわち, $L_i + f_j$ の期待値) を求める。

Step 3) Step 2 の作業をすべての $K(i)$ について行い, 期待値が最小となるとき $K(i)$ が $S(i)$ の状態における最適な放流量 $G(i)$ となる。

Step 4) Step 2, Step 3 の作業をすべての $S(i)$ について行う。

Step 5) 年間を通しての $(G(i), S(i))$ が定常状態となれば計算を打ち切る。

2.3.3 評価関数の設定

上記の確率 DP のアルゴリズムの中では, 直接損失 $L_i(K(i); S(i), X(i))$ としてどのような評価関数を設定するかが問題となる。この評価関数 (損失関数) のとり方によって, 後に示すように, 得られるルールが大きく異なってくるのである。

渇水による損失 (渇水被害) を計量する種々の方法が提案されている。大別すると, (1) 金銭的尺度による方法, (2) 指標尺度による方法に分けられ, 表 2.7 のように整理できる。

表 2.7: 渇水被害の計量方法 (中川 (1984))

分 類		手 法
金銭的尺度 による方法	市場経済的価格に 基づく方法	渇水被害原単位法 付加価値・被害率法 渇水の機会損失による方法
	市場経済的価格に現 れないものをも計量 しようとする方法	WP 水単価方式 代替価格方式 (渇水被害原単位法)
指標尺度による方法		(不足%)・日 (不足%) ² ・日 節水非認容率

渇水被害を各用水・地域を通じて相互に比較可能なように評価し、かつ渇水対策・水資源開発の費用との比較が可能な方法が望ましい。この観点からは、貨幣価値の変化があるにしても、金銭的尺度がよいと思われるが、渇水被害には、金銭の評価ができないもの、可能であっても困難なものが多い。そこで渇水の程度を何らかの指標で代表させようというのが、(2)の指標尺度による方法である。利水用貯水池制御の主目的は、河川流量の安定供給を図り渇水被害を軽減させることにある。ダムへの水需要量に対するダムからの供給量(放流量)の不足によって損失が生じると考え、評価関数は、需要量と放流量の関数とみなすのが妥当であろう。

m 月の需要が D_m であるとき、実際の放流量が K_m であったとすれば、そのときの不足量 Q 、不足率 R は次式で定義できる。

$$Q = D_m - \min\{D_m, K_m\} \quad (2.4)$$

$$R = \frac{Q}{D_m} = \frac{D_m - \min\{D_m, K_m\}}{D_m} \quad (2.5)$$

また、次のように被害 U を用水ごとに計量する場合がある。

$$U = \sum_n \sum_{R_n} V_n \times R_n \times g_n(R_n) \times d_n(R_n) \quad (2.6)$$

ここに、 n は用水の種別(家庭用水、営業用水、工業用水、農業用水など)を表す番号で、 V_n は用水 n の計画取水量、 R_n は用水 n に対する不足率、 g_n は単位被害(金銭的損失)を与えるもので R_n の関数、 d_n は用水 n に対して不足率 R_n である日数を表す。この単位被害と不足率との関係は渇水被害を受けた地域におけるアンケート調査によって与えられることが多い。このような被害の計量の仕方は“渇水被害原単位法”と呼ばれている。

2.3.4 設定した評価関数と平常ルール

前述の四つの研究では、中村(1976)は $Q \times R$ 、建設省土木研究所(1979)は U 、中川(1984)は Q^2 、富田ら(1984)は R^2 を評価関数として採用していることになる。本研究でも、(2.3)における直接損失 L_i をこれらの関数として定義することにし、これらの中で望ましい評価関数を見いだすことにする。

評価関数によって得られるルールが異なるので、用いた評価関数に従ってルール名をつけることとした。ここでは、次の10個のルールを考えた。

ルール Q1 評価関数として不足量 Q を用いる。

ルール Q2 評価関数として不足量の2乗 Q^2 を用いる。

ルール QR 評価関数として不足量と不足率の積 $Q \times R$ を用いる。これは、いわゆる渇水被害関数(たとえば、今村・大内(1982))に相当する。

ルール R2 評価関数として不足率の2乗 R^2 を用いる。

ルール UN 評価関数として渇水被害額 U を用いる。ただし、農業用水を考慮しない。

表 2.8: 洪水被害原単位 [建設省土木研究所 (1979)]

節水率 (%)	10	20	30	40	50	60	70	80
上水道事業体	150							
家庭用水				20	400	1,200	2,400	4,000
営業用水 1	400	1,400	3,000	5,200	8,000	11,400	15,400	20,000
営業用水 2	1,150	2,150	3,000	3,700	4,250	4,650	4,900	5,000
工業用水 1	20	106	258	476	761	1,111	1,527	2,000
工業用水 2	20	45	75	110	150	195	245	300
農業用水	3	20	50	92	150	218	300	400

(単位: 円 / m³)

表 2.9: 福岡市水需要データ (昭和 52 年)

用途	家庭用	公共用	サービス用	業務用	工場用
需要量 (千 m ³)	61,921	13,207	30,280	43,487	4,367

なお、公共用水は表 2.8 の「家庭用水」に含まれるものとする。

また、サービス用水は「営業用水 2」に、業務用水は「営業用水 1」に、工場用水は「工業用水 1」に相当するものとする。

ルール WQ1 評価関数として不足量に重み付けしたもの wQ を用いる。

ルール WQ2 評価関数として不足量の 2 乗に重み付けしたもの wQ^2 を用いる。

ルール WQR 評価関数として不足量と不足率の積に重み付けしたもの $wQ \times R$ を用いる。

ルール WR2 評価関数として不足率の 2 乗に重み付けしたもの wR^2 を用いる。

ルール UNA 評価関数として洪水被害額 U を用いる。農業用水をも考慮する。

このうち、WQ1 から WR2 までの四つは、灌漑期 (6 月から 9 月) と非灌漑期の区別を導入したものであり、灌漑期には $w = 2$ 、非灌漑期には $w = 1$ とした。これは、夏場に水田の灌漑のために流域全体としての水需要が急激に増加しはば 2 倍になる (志村 (1982)) ことを考慮しようとしたものでこの期間の水不足が非灌漑期の水不足の 2 倍程度の重みをもつと仮定したものである。UN と UNA は、それぞれこの灌漑用水を考慮しない場合と考慮する場合を考えた。表 2.8 は建設省土木研究所 (1979) が用いた洪水被害原単位であり、ここでもこれを流用する³が、農業用水の原単位は比較的小さいので、後で示されるように、UN と UNA の差はあまり大きくならない。なお、洪水被害額を算出するときに用いる福岡市の用水別水需要は表 2.9 に示すものによった。さて、これらの評価関数を用いて得られたルールのうち、Q1 (WQ1 も同じ結果となった)、QR, WQR, UNA を図 2.6 に示す。図 2.6 から以下のようなことが言える。

1. 評価関数によって全く異なるルールが得られる。
2. ルール Q1 や WQ1 は貯水量の多寡に関わらず常に需要量を目標放流量とする、いわば楽観的なルールであると言える (図 2.6(a))。
3. ルール UNA は、逆に、最も悲観的なルールであると言える。なぜならば、7 月から 10 月の間は月始めに貯水池が満杯であっても需要どうり放流しないようなルールになっている⁴からである (図 2.6(d))。

³これは福岡市域の実情に必ずしも適合しないかも知れないが、一つの指標として用いるぶんには差し支えないであろう。

⁴もちろん、流入量の多いときには (2.2) 式の放流ルールに従って目標放流量よりも多い量を放流 (いわゆる無効放流) することになり、このときに限り需要が満たされることになる。

W.L.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
19	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
18	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
17	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
16	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
15	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
14	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
13	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
12	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
11	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
10	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
9	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
8	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
7	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
4	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
3	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
2	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
1	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
0	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
DEMAND	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7

(a) Q1 , WQ1

W.L.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
19	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
18	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
17	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
16	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
15	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
14	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
13	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
12	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
11	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
10	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
9	5	6	6	7	7	7	7	7	7	7	6	6
8	5	5	6	7	7	7	7	7	7	7	6	6
7	5	5	6	6	7	7	7	7	7	7	6	6
6	5	5	6	6	7	7	7	7	7	7	6	6
5	5	5	6	6	7	7	7	7	7	7	6	6
4	5	5	6	6	7	7	7	7	7	7	6	6
3	5	5	6	6	7	7	7	7	7	7	6	6
2	5	5	6	6	7	6	7	7	7	7	5	6
1	5	5	6	6	7	6	7	7	7	7	5	6
0	5	5	6	6	7	6	7	7	7	7	5	6
DEMAND	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7

(b) QR

W.L.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	6	6	7	7	7	7	8	8	7	6	7	7
19	6	6	7	7	7	7	8	8	7	6	7	7
18	6	6	7	7	7	7	8	8	7	6	7	7
17	6	6	7	7	7	7	8	8	7	6	7	7
16	6	6	7	7	7	7	8	7	7	6	6	7
15	6	6	7	7	7	7	8	7	7	6	6	7
14	6	6	7	7	7	7	8	7	7	6	6	6
13	6	6	7	7	7	7	8	7	7	6	6	6
12	5	5	6	7	7	7	8	7	7	6	6	6
11	5	5	6	7	7	7	8	7	7	6	6	6
10	5	5	6	7	7	7	8	7	7	6	6	6
9	5	5	6	7	7	7	8	7	7	6	6	6
8	5	5	6	7	7	7	8	7	7	6	6	6
7	5	5	6	6	7	7	8	7	7	6	6	6
6	5	5	6	6	7	7	7	7	7	5	6	6
5	5	5	6	6	7	7	7	7	7	5	6	6
4	5	5	6	6	7	7	7	7	7	5	5	6
3	5	5	5	6	7	7	7	7	7	5	5	5
2	5	4	5	6	7	7	7	7	6	5	5	5
1	4	4	5	6	7	7	7	7	6	5	5	5
0	4	4	5	6	7	7	7	7	6	5	5	5
DEMAND	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7

(c) WQR

W.L.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	6	6	7	7	7	7	7	7	7	6	7	7
19	6	6	7	7	7	7	7	7	7	6	6	7
18	6	6	7	7	7	7	7	7	7	6	6	7
17	6	6	7	7	7	7	7	7	7	6	6	7
16	6	6	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6
15	6	6	7	7	7	7	6	7	7	6	6	6
14	5	6	7	7	7	6	7	7	7	6	6	6
13	5	5	6	7	7	6	7	7	7	6	6	6
12	5	5	6	7	7	6	7	7	7	6	6	6
11	5	5	6	6	7	6	7	7	7	6	6	6
10	5	5	6	6	6	6	6	7	7	5	6	6
9	5	5	6	6	6	6	6	7	6	5	6	6
8	5	5	6	6	6	6	6	7	6	5	5	6
7	5	5	6	6	6	6	6	7	6	5	5	5
6	5	5	6	6	6	6	6	7	6	5	5	5
5	4	4	5	6	6	6	6	6	6	5	5	5
4	4	4	5	6	6	6	6	6	6	5	5	5
3	4	4	5	5	6	6	6	6	6	5	5	5
2	4	4	5	5	6	6	6	6	6	5	5	5
1	4	4	5	5	6	6	6	6	6	5	5	5
0	4	4	5	5	6	6	6	6	6	4	5	5
DEMAND	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7

(d) UNA

図 2.6: 最適化された平常ルール

表 2.10: 評価関数による平常ルールの評価

RULE	EVALUATION SCORES									
	Q1	WQ1	Q2	WQ2	QR	WQR	R2	WR2	UN	UNA
Q1	*92.7	*112.4	389.9	482.7	555.0	674.1	79.6	94.9	5034.3	5084.4
WQ1	*92.7	*112.4	389.9	482.7	555.0	674.1	79.6	94.9	5034.3	5084.4
Q2	103.1	131.9	307.0	391.2	434.6	543.0	62.4	76.3	3643.1	3681.4
WQ2	105.8	130.0	301.6	382.2	428.8	531.7	61.9	75.0	3476.4	3515.1
QR	102.8	132.1	308.4	394.5	435.9	546.4	62.5	76.6	3663.4	3702.7
WQR	106.3	133.2	299.8	385.2	423.6	532.5	60.8	74.6	3425.7	3465.4
R2	103.4	134.9	306.1	397.6	430.9	548.1	61.5	76.5	3583.1	3623.8
WR2	106.0	134.2	299.4	386.9	421.4	533.0	60.2	74.4	3410.0	3450.0
UN	120.5	157.4	273.1	356.8	384.5	491.7	*55.1	68.9	2732.2	2762.1
UNA	120.8	157.7	*272.9	*356.2	*384.4	*491.1	55.2	*68.8	*2726.7	*2756.4

4. QR と WQR の比較から、灌漑期に重みをつけることは、非灌漑期に水を節約させ (すなわち、目標放流量が低貯水量のところで小さくなる)、灌漑期前半の 6, 7 月に目標放流量を増やす効果がある。ここには示していないが、Q2 と WQ2, R2 と WR2 についても同様のことが言える。

また、ルール QR は、Q2 と R2 の中間的存在である。Q2 はどちらかといえば楽観側であり、R2 は悲観側 (UNA に近い) である。次節では、これらのルールの性能比較を行うことにする。

2.4 平常時の貯水池操作ルールの比較評価

前節で求めた操作ルールは、それぞれの評価関数に対して最適な (すなわち、長期にわたる被害評価を最小にしようとする) ルールであり、流入量はこれまでの各ダム流域での降水流出の実績に基づく経験分布を用いているので、特定の規模の渇水を想定したものではない。したがって、これらのルールは、平常時のルール (いわゆる“計画操作”を規定するルール) とも言えよう。ここでは、これらを“平常ルール”と呼ぶことにする。わざわざこのように呼ぶ理由は、次の節である特定の規模を想定した“渇水ルール”について検討するのでそれとの区別を明確にするためである。

ここでは、これらの“平常ルール”がいったいどのような性能をもつのかを調べ、望ましい評価関数を明らかにしようとする。

2.4.1 評価関数それ自身による各ルールの評価

平常ルールを求めるために損失関数として設定した評価関数 (目的関数) そのものがルール評価の規準となり得る。

図 2.5 の確率分布を求めるときに発生させた 10,000 年分の流入量系列に対して各平常ルールを適用し、前節で用いた 10 個の評価関数の評価値を各ルールについて求め比較した。表 2.10 はその結果を示したものである。表中、上から下にルールが並んでおり、評価関数が横に並べてある。すなわち、それぞれの評価関数の列の中で各ルールの相対的评价ができる。星印は各評価関数の中で最も評価の良いものを示している。この星印は本来対角線上に並ぶべきものと思われる (それぞれ各評価規準で最適なルールなのであるから) が、そのようになっていない。その理由の一つは、確率 DP による最適化では各流入量系列が完全に独立であると仮定したが、ここで用いた 10,000 年分の流入量系列は、厳密に言えば表 2.5 に示したような相関をもつことにあると思われる。

Q1 と WQ1 は全く同じルールであり、評価規準 Q1 と WQ1 については最も良い成績を示すが、それ以外の規準については評価値が極端に悪くなる。このルールは、必要なだけどんどん放流するという楽観的なルールであるため甚大な被害を受け易いと言える。

ルール Q2, QR, R2 は似たような結果を示す。これらに重み付けした WQ2, WQR, WR2 は、Q1, WQ1 以外の評価規準について、重み付けしないものより良い。

Q1, WQ1 以外の評価規準は、大きな不足をより際立たせる (2 乗の評価をする) 規準であるので、これらに対して良い成績を示す (すなわち、大きな不足があまり生じないような) ルールが良い。また、どの評価規準によって

表 2.11: 平常ルール of 月別信頼度 α_1

	JAN	FEB	MAR	APR	MAY	JUN	JUL	AUG	SEP	OCT	NOV	DEC		TOTAL	6-9	10-5
Q1	0.743	0.703	0.636	0.684	0.636	0.855	0.887	0.832	0.892	0.861	0.803	0.750	Q1	0.774	0.866	0.727
WQ1	0.743	0.703	0.636	0.684	0.636	0.855	0.887	0.832	0.892	0.861	0.803	0.750	WQ1	0.774	0.866	0.727
Q2	0.441	0.436	0.366	0.392	0.725	0.529	0.553	0.630	0.502	0.522	0.573	0.531	Q2	0.517	0.553	0.498
WQ2	0.301	0.257	0.270	0.484	0.765	0.890	0.717	0.621	0.447	0.427	0.451	0.390	WQ2	0.502	0.669	0.418
QR	0.501	0.488	0.363	0.385	0.723	0.627	0.531	0.577	0.451	0.495	0.585	0.537	QR	0.522	0.547	0.510
WQR	0.383	0.320	0.269	0.482	0.763	0.891	0.717	0.550	0.361	0.244	0.499	0.427	WQR	0.492	0.630	0.423
R2	0.584	0.496	0.369	0.392	0.727	0.689	0.502	0.554	0.362	0.514	0.561	0.494	R2	0.520	0.527	0.517
WR2	0.453	0.374	0.260	0.468	0.759	0.890	0.663	0.525	0.363	0.245	0.502	0.428	WR2	0.494	0.610	0.436
UN	0.386	0.312	0.261	0.312	0.396	0.387	0.463	0.280	0.406	0.264	0.344	0.334	UN	0.345	0.384	0.326
UNA	0.309	0.324	0.266	0.317	0.400	0.389	0.463	0.281	0.406	0.264	0.344	0.334	UNA	0.341	0.385	0.320

も良い成績を示すルールが望ましい。この観点に立てば、ルール UNA がこれらの中では最も良いということになる。

なお、1966 年から 1982 年までの福岡地点の月降水量データを気象庁観測所気象年報より収集し、前述の要領でその 17 年間の月流入量系列を求めて同様の比較評価を行った。評価結果は表 2.10 と全く同様であった。

2.4.2 システム性能評価規準による評価

第 3 編第 1 章の 1.3.2 で示したようなシステムの信頼性の評価規準 (Hashimoto et al. (1982)) により、各ルールを評価してみよう。この適用例は、Moy et al. (1986)、池淵ら (1987)、小尻ら (1987)、Duckstein and Plate (1987) などにも見られる。

(1.1), (1.2), (1.3) 式で与えられるこれらの規準は、確率あるいは期待値が導入されているので、これらの値を求めるためにシミュレーションによって解析する場合長期にわたるデータを要する。ここでも、上述の 10,000 年の流入量系列を用いることとした。

a) 信頼度による評価

信頼度 (reliability) や回復度 (resiliency) を考えるとき、システムが満足すべき状態の集合 S とは何であるかが問題になる。

利水システムの場合、まず問題となるのは、システム出力である i 期 (m 月) の放流量 $K(i)$ (K_m) がその期の需要 $D(i)$ (D_m) を満たすかどうかであろう ($i = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, 12$)。すなわち、需要を満たす場合が S 、満たさない場合が F ということになる。この場合の信頼度 (便宜上、 α_1 と記す) は次式で与えられる。

$$\alpha_1 = \text{Prob}[K(i) \geq D(i)] \quad (2.7)$$

この定義による信頼度を月ごとに求めて整理したのが表 2.11 である。月ごとの信頼度を灌漑期 (6 ~ 9 月)、非灌漑期、通年で平均したものも表の右方に併記した。以下、簡単のため、10 個のルールのうち代表的な四つ (Q1, QR, WQR, UNA) について議論する。これから次のようなことが言える。

1. ルール Q1 は、これらの中では年間を通じて高い信頼度を示す。常に水需要を満足させようとする楽観的なルールであるから、特に灌漑期において 0.866 という相対的に高い信頼度を示す。3 月から 5 月にかけては、0.7 以下に落ちるが、この期間に流入があまり多くないことを反映している。年間を通じて常に 0.9 以上の信頼度を得るためには、貯水池容量の拡大、すなわち、新たな貯水施設の開発が必要であることを示している。
2. ルール UNA は、ルール Q1 と対照的である。年間を通じて需要を満たす確率は 0.4 を割り込んでいる。このルールは、たとえ貯水池が満杯であっても、よほど余裕のあるとき (すなわち、流入量が十分あるとき) でない限り、将来起こり得る甚大な被害を極力抑えるために需要を満たそうとしないのである。
3. 灌漑期を重視したルール WQR は、灌漑期初頭 (5 月、6 月) に高い信頼度を得る。その代わり灌漑期終期に信頼度が低くなる。

表 2.12: 平常ルールの月別枯渇確率

	JAN	FEB	MAR	APR	MAY	JUN	JUL	AUG	SEP	OCT	NOV	DEC		TOTAL	6-9	10-5
Q1	0.281	0.299	0.344	0.409	0.372	0.412	0.177	0.134	0.188	0.128	0.160	0.222	Q1	0.260	0.228	0.277
WQ1	0.281	0.299	0.344	0.409	0.372	0.412	0.177	0.134	0.188	0.128	0.160	0.222	WQ1	0.260	0.228	0.277
Q2	0.166	0.168	0.188	0.245	0.224	0.320	0.123	0.092	0.131	0.079	0.091	0.129	Q2	0.163	0.166	0.161
WQ2	0.150	0.127	0.128	0.172	0.184	0.280	0.136	0.094	0.135	0.084	0.086	0.118	WQ2	0.141	0.161	0.131
QR	0.165	0.166	0.186	0.246	0.227	0.324	0.129	0.095	0.133	0.080	0.091	0.128	QR	0.164	0.170	0.161
WQR	0.135	0.130	0.135	0.178	0.185	0.282	0.136	0.095	0.135	0.073	0.079	0.106	WQR	0.139	0.162	0.128
R2	0.145	0.152	0.173	0.239	0.224	0.320	0.133	0.096	0.134	0.067	0.081	0.114	R2	0.157	0.171	0.149
WR2	0.120	0.140	0.164	0.188	0.192	0.287	0.138	0.095	0.133	0.067	0.077	0.098	WR2	0.142	0.163	0.131
UN	0.084	0.077	0.082	0.113	0.120	0.181	0.079	0.052	0.078	0.045	0.049	0.069	UN	0.086	0.097	0.080
UNA	0.084	0.077	0.082	0.113	0.119	0.180	0.078	0.052	0.078	0.045	0.049	0.069	UNA	0.085	0.097	0.080

4. ルール QR によれば、通年で 0.5 程度の信頼度である。

次に、別の観点から信頼度を見てみよう。貯水池の貯水量がある程度確保されていることが、管理者なりユーザーなりに何がしかの安心感を与える。特に、貯水池が枯渇するといった事態は、水利用のみならず、ダム堤体そのものの安全性という観点からも、是非とも回避しなければならない。よって、貯水量 $S(i)$ があるレベル Z 以上確保できている状態を S とするような信頼度 (これを α_2 と記すことにする) を考える。すなわち、

$$\alpha_2 = \text{Prob}[S(i) \geq Z] \quad (2.8)$$

$Z = 1\text{百万m}^3$ のとき、 α_2 は貯水池が枯渇しない確率を与える。このとき、貯水池枯渇確率は $1 - \alpha_2$ である。表 2.12 は、この貯水池枯渇確率を求め整理したものである。この表から以下のことが言える。

1. ルール Q1 は、貯水池の枯渇する確率がきわめて高い。特に、灌漑期前は 0.3 から 0.4 という悲惨な状況である。このルールに従うと、灌漑期に小雨であれば直ちに貯水池が枯渇することになり、非常に危険であると言える。
2. 一方、ルール UNA は、年間を通じて枯渇確率はほぼ一定 (0.1 程度) であり安定している。6 月の枯渇確率がやや高い (0.18) が、他のルールと比べると断然優れていると言える。
3. 灌漑期に重みをつけたルールは、重みをつけないものよりも枯渇確率が小さくなる。

表 2.13 は、10,000 年のシミュレーションの間に各月の貯水量の出現回数 (貯水量頻度分布) を、ルール Q1, QR, WQR, UNA について示したものである。貯水量 0 の頻度を 10,000 で割ったものが上述の枯渇確率に対応する。(2.8) 式の m 月の α_2 の値は、この表の m 月の $S = 20$ から $S = Z$ までの頻度を加えて、10,000 で除したものに等しい。この表から、大きな貯水量を確保できるのは UNA であることがわかる。枯渇確率だけでなく、ルールにより異なるこのような貯水量分布を求めておくことも貯水池管理上重要である。

以上のように、一口に信頼度といっても、見方によって評価が逆転することになる。

b) 回復度による評価

信頼度のときと同様、まず、放流量が需要を満たすかどうかという観点での回復度を見てみよう。このときの回復度を γ_1 と記すことにする。

$$\gamma_1 = \text{Prob}[K(i+1) \geq D(i+1) | K(i) < D(i)] \quad (2.9)$$

表 2.14 は γ_1 を示したもので、これから次のようなことが言える。

1. なるべく需要どうりに放流しようとするルール Q1 は、多い流入量の期待できる 6, 7, 9 月に高い回復度を示す。すなわち、5, 6, 8 月の放流量が需要以下であっても次の月に回復する (需要を満たす) 確率はそれぞれ 0.704, 0.545, 0.571 であることを示している。8 月は流入量がそれほど多くないので 7 月に需要以下であれば 8 月も需要以下になる可能性は 8 割近い ($1 - 0.216 = 0.784$)。

表 2.13: 貯水量の頻度分布

	JAN	FEB	MAR	APR	MAY	JUN	JUL	AUG	SEP	OCT	NOV	DEC	
Q1	20	446	455	336	280	567	672	2975	4291	2632	3815	2474	935
QR	19	201	198	184	112	137	152	251	310	436	409	578	391
WQR	18	335	249	217	149	165	180	244	335	427	428	624	585
UNA	17	441	286	248	193	195	214	300	327	542	414	718	654
	16	337	304	264	210	208	221	289	291	565	421	612	666
	15	471	391	303	242	253	220	253	300	580	375	459	480
	14	535	403	297	281	298	247	257	262	493	402	373	538
	13	546	461	395	326	284	255	308	257	307	298	415	535
	12	524	494	416	336	326	274	275	239	269	323	309	580
	11	578	567	421	389	358	282	325	232	292	266	320	511
	10	548	528	533	398	436	322	300	282	265	262	260	467
	9	561	545	515	441	411	359	319	265	242	248	291	424
	8	573	592	565	462	478	373	337	238	221	223	253	303
	7	515	613	607	585	465	344	340	252	211	222	235	278
	6	369	500	602	582	528	422	319	228	224	184	208	238
	5	288	432	593	596	550	432	313	200	202	206	191	269
	4	277	354	444	523	531	446	332	214	211	169	222	198
	3	255	355	406	471	507	458	312	184	185	171	153	233
	2	275	306	413	520	543	429	308	204	186	189	187	233
	1	234	310	385	440	489	462	310	179	176	175	163	205
	0	1651	1657	1856	2464	2271	3236	1293	950	1334	800	915	1277
Q1	20	545	595	441	395	794	889	3613	5008	3276	4527	3265	1147
QR	19	278	249	228	164	211	193	290	362	486	441	711	501
WQR	18	388	324	312	208	266	255	266	362	599	433	745	721
UNA	17	560	388	364	268	252	285	286	325	611	439	732	922
	16	584	463	366	319	316	300	323	266	673	437	667	960
	15	694	535	465	334	316	309	309	269	556	372	330	792
	14	779	664	462	423	395	331	321	216	321	329	372	601
	13	855	767	617	457	409	353	323	266	248	333	342	468
	12	813	788	676	494	454	367	364	252	255	287	331	419
	11	536	641	743	577	511	402	331	276	227	254	298	310
	10	462	604	694	655	547	412	302	240	218	239	277	313
	9	372	531	568	668	548	431	294	233	221	197	273	311
	8	344	432	538	597	547	504	351	233	226	186	242	330
	7	316	390	473	525	557	503	314	204	207	196	226	284
	6	336	350	459	520	528	516	290	177	177	186	196	282
	5	337	354	438	503	534	522	294	193	207	153	150	289
	4	316	355	422	512	433	453	278	160	176	164	167	240
	3	221	338	365	449	430	431	236	136	188	146	126	155
	2	235	257	299	429	424	403	244	150	179	123	138	145
	1	189	228	274	368	366	373	210	153	171	109	133	142
	0	840	767	816	1135	1192	1796	781	517	778	449	489	688

表 2.14: 平常ルールの月別回復度 γ_1

	JAN	FEB	MAR	APR	MAY	JUN	JUL	AUG	SEP	OCT	NOV	DEC		TOTAL	6-9	10-5
Q1	0.214	0.175	0.169	0.360	0.252	0.704	0.545	0.216	0.571	0.242	0.091	0.114	Q1	0.304	0.509	0.202
QR	0.086	0.107	0.048	0.127	0.566	0.109	0.248	0.172	0.130	0.160	0.194	0.065	QR	0.167	0.165	0.169
WQR	0.080	0.072	0.061	0.293	0.573	0.697	0.080	0.095	0.135	0.094	0.338	0.053	WQR	0.214	0.252	0.196
UNA	0.091	0.115	0.068	0.133	0.198	0.225	0.268	0.112	0.280	0.107	0.109	0.105	UNA	0.151	0.221	0.116

表 2.15: 貯水池枯渇状態からの回復度

	JAN	FEB	MAR	APR	MAY	JUN	JUL	AUG	SEP	OCT	NOV	DEC		TOTAL	6-9	10-5
Q1	0.074	0.145	0.118	0.135	0.285	0.209	0.655	0.511	0.193	0.502	0.194	0.064	Q1	0.257	0.392	0.190
QR	0.112	0.213	0.168	0.168	0.342	0.194	0.703	0.546	0.214	0.571	0.289	0.134	QR	0.304	0.414	0.250
WQR	0.154	0.295	0.251	0.222	0.330	0.197	0.651	0.556	0.210	0.620	0.284	0.133	WQR	0.325	0.404	0.286
UNA	0.157	0.280	0.244	0.212	0.419	0.227	0.694	0.603	0.240	0.609	0.352	0.117	UNA	0.346	0.441	0.299

2. UNA は、よほど余裕のあるときしか需要を満たさないルールなので、回復度は全般に小さい。

3. QR, WQR は、灌漑期直前に高い回復度を示す。特に、WQR は、5, 6 月の回復度がかなり高いが灌漑期の 7, 8 月には回復度が 0.1 を割り込み最も悪くなる。

表 2.15 は、前の月に貯水池が枯渇していたのが回復する確率を示している。ルール UNA が年間通じて相対的に高い回復度を示している。UNA は、前述のように枯渇する確率が低い上、かりに枯渇してもその状態から回復しやすい。逆に、Q1 は、枯渇する確率が高い上、一旦枯渇すると回復しにくい。どのルールによっても 12 月から 4 月の間に枯渇すると回復しにくいことがわかる。

b) 深刻度による評価

深刻度 (vulnerability) は、システムの状態の深刻さを期待値的に示す指標であれば何でもよい。Hashimoto et al. (1982) が、その適用例の中で用いているのは、不足率の累乗の期待値である。すなわち、

$$\nu(\beta) = E\left[\left\{\frac{D(i) - \min\{D(i), K(i)\}}{D(i)}\right\}^\beta\right] \quad (2.10)$$

ここに、指数 β は、Hashimoto et al. (1982) に準じて $\beta = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 5.0, 7.0$ の 9 通りの値を設定した。 $\beta = 1.0$, $\beta = 2.0$ はそれぞれ R , R^2 であり、利水安全度の指標としてよく用いられる“不足%”, “(不足%)²”に対応する。図 2.7 は、10,000 年の流入量系列に対して求めた深刻度を、ルール Q1, QR, WQR, UNA について示したものである。図 2.7 から以下のことが言える。

1. $\beta \leq 1.0$ に対して最も小さい深刻度を与えるのはルール Q1 であり、続いて QR, WQR, UNA の順である。この β の値は、深刻な不足をあまり深刻に考えないことを意味し、その場合には、いつでも放流できるだけ放流する楽観的なルールが良いことになる。
2. $\beta > 1.0$ の領域ではこれらのルールの立場は全く逆転する。すなわち、深刻な不足をより深刻に考えるとルール UNA が良いことになる。

2.4.3 まとめ

需要をなるべく満たすという観点からは Q1 のような楽観的なルールが良い。しかしながら、このようなルールは、貯水池枯渇確率が高く、甚大な被害を引き起こす可能性が高いので、ルール UNA のような節約型のルールが望ましいと言える。このルールは、貯水池が満杯であるにも関わらず需要通り放流しないこともあるので受け入れられにくい側面も有していると思われる。しかし、長期的にみてこのような節水型のルールが甚大な被害を未然に防ぐことのできるものである。なぜ、このような節水型のルールにしなければならないのかと言えば、この利水システムの貯水容量が不足していることによる。さらに容量があれば、信頼度を上げ、枯渇確率を小さくすることができるわけである。

したがって、ここで取り扱ったような利水システムの場合、(2.6) 式で与えられるような評価関数 U が良い。この評価関数の優れた点は、種々の用水とそのそれぞれの需要を考慮できることである。ただし、不足による被害が用水ごとにうまく計量できない場合にはこの評価関数を用いることができない。その場合には、 wQ^2, wQR, wR^2 のような評価関数が良いルールを与えることになる。

利水システムの性能評価のために上の信頼性評価の規準は有用であり、対象としているシステムがどれ程の頻度で不満足な状態に陥り、それがどの位長く続くのか、また、どれほど甚大な被害を与えるのかを記述する有力な手段である。システム性能を評価する際には、一面的な見方ではなく、こうした規準により総合的に見ていく必要がある。

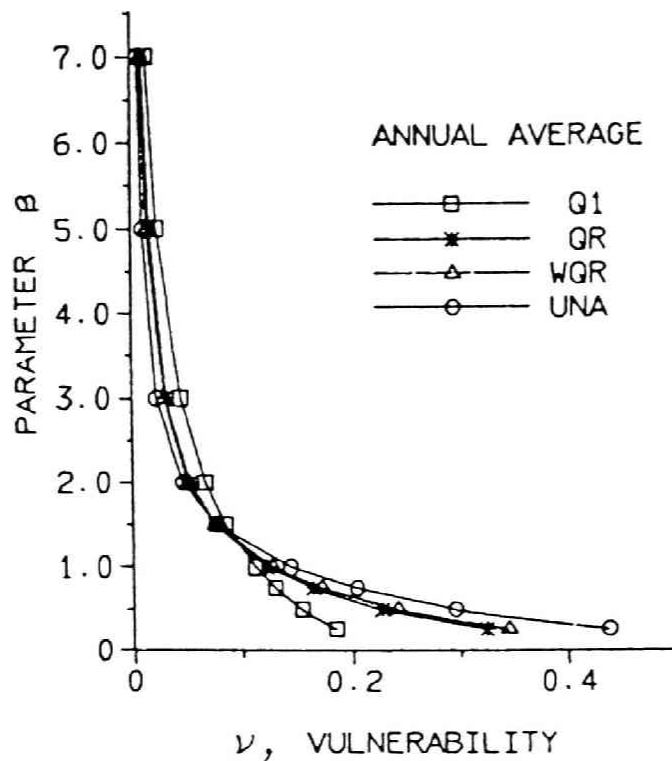


図 2.7: 平常ルールの深刻度 $\nu(\beta)$

2.5 渇水時の貯水池操作方式について

渇水が予測される場合、あるいは既に渇水状態に陥った場合、上述の“平常ルール”に従って貯水池の操作を実行していくと、短時間のうちに貯水池は枯渇し、甚大な被害を生み出すことになる。したがって、渇水時の操作は、平常ルールを何らかの別のルールに切り替え、被害を軽減するものでなければならない。

本節では、渇水が想定された場合のルール(これを“平常ルール”に対して“渇水ルール”と呼ぶことにする)を求め、これを利用した渇水時の操作方式について検討する。

2.5.1 渇水ルール

渇水ルールを求めるために以下のようにする。

Step 1) 渇水状態を引き起こすのは、ある程度長期にわたる少雨が原因であり、その少雨の規模と期間(T 年確率に相当する K か月少雨あるいは流入量)を想定する。

Step 2) 過去のデータから T 年確率に相当する K か月流入量を求める。

Step 3) K か月流入量を一月ごとに配分する。⁵

Step 4) 平常ルールを求めたときに用いた 12 個の月流入量の確率分布のうち想定する期間の K か月分を、上の Step 3 の月流入量に置き換える。

Step 5) こうして置き換えられた流入量の確率分布の系列を用いて、平常ルールを求めたのと同じ方法で、すなわち、確率 DP を適用して最適操作ルールを求める。

こうして得た“渇水ルール”は、想定された規模・期間をもつ渇水に対する最適な操作ルールであると言える。

ここでの適用では上の手順を具体的に次のようにした。

⁵ ここで配分される各月の流入量はパルス状に尖った何らかの確率分布をもつと考えてもよい。

表 2.16: 1/50 確率 3 か月流入量の配分

期間	第 1 月	第 2 月	第 3 月
1~3 月	2	1	2
2~4 月	1	2	2
3~5 月	1	2	2
4~6 月	2	2	3
5~7 月	2	3	3
6~8 月	3	3	2
7~9 月	4	2	2
8~10 月	2	3	1
9~11 月	3	2	1
10~12 月	2	2	1
11~1 月	2	1	2
12~2 月	1	2	2

W.L.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	6	6	6	6	6	5	6	6	7	6	6	6
19	6	5	6	6	6	5	6	6	7	6	6	6
18	5	5	6	6	6	5	6	6	7	6	6	6
17	5	5	6	6	6	5	6	6	7	6	6	6
16	5	5	6	6	6	5	6	6	6	6	6	6
15	5	5	6	6	6	5	6	6	6	6	6	6
14	5	5	6	6	6	5	5	5	6	6	6	6
13	5	5	6	6	6	5	5	5	6	6	6	6
12	5	5	6	6	6	5	5	5	6	6	6	6
11	5	5	6	6	5	4	5	5	6	5	6	6
10	5	5	6	6	5	4	5	5	5	5	6	6
9	5	5	6	6	5	4	5	5	5	5	5	6
8	5	5	5	5	5	4	4	4	5	5	5	5
7	5	5	5	5	5	4	4	4	5	5	5	5
6	4	4	5	5	5	4	4	4	5	5	5	5
5	4	4	5	5	5	4	4	4	4	5	5	5
4	4	4	5	5	5	4	4	3	4	5	5	5
3	4	4	5	5	5	4	4	3	4	5	5	5
2	4	4	5	5	5	4	3	3	3	5	5	5
1	4	4	5	5	5	4	3	2	3	5	5	5
0	4	4	5	5	5	4	3	2	2	4	5	5
DEMAND	6	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7

図 2.8: 渇水ルール PAT-7

Step 1) $T = 50$, $K = 3$ とする。すなわち、計画規模を超えるような渇水として 50 年確率の 3 か月渇水を想定する。

Step 2) 前述の 10,000 年の流入量系列から、 t 月を起点とする 3 か月流入量を求める (すなわち、 $t = 1, 2, \dots, 12$ それぞれについて 10,000 個ずつの系列を得る)。これらの中から、50 年確率に相当する 3 か月流入量を求める。

Step 3) 福岡の月雨量の平均値 (水利科学研究所 (1980b)) に基づいて、この 3 か月流入量を期間内の各月に比例配分する。配分結果を表 2.16 に示す。

Step 4) 表 2.16 のように配分された流入量はそれぞれ確率 1 の mass として考える。

Step 5) 前節での議論により、評価関数として (2.6) 式の U を用いて確率 DP の計算を行う。

$t = 1, 2, \dots, 12$ それぞれについて 12 個の渇水ルールを得た。それらのルールをここでは “PAT- t ” と呼ぶことにしよう。図 2.8 には PAT-7 (7-9 月の渇水を想定した渇水ルール) を示す。平常ルール UNA (図 2.6(d)) と比べると、さらに節水型のルールとなっており、特に、想定した期間内で貯水量が少ないときおよび想定した期間の直前でかなり水をセーブすることになる。

表 2.17: 1966-82 年の 3 か月流入量の系列 (単位: 百万 m³)

Y.	SUM	1-3	2-4	3-5	4-6	5-7	6-8	7-9	8-10	9-11	10-12	11-1	12-2
66	66	7	11	13	18	18	15	23	28	35	20	17	12
67	63	13	20	20	18	22	23	21	7	8	11	11	15
68	70	13	11	4	8	23	26	33	23	20	15	17	21
69	74	16	14	12	21	32	34	27	13	11	10	11	9
70	74	5	10	19	36	36	29	19	21	21	14	11	11
71	53	13	7	6	8	16	24	26	19	10	5	16	25
72	152	31	26	23	36	64	76	65	37	28	22	23	17
73	76	13	17	20	27	25	21	27	23	22	10	5	6
74	60	9	12	16	13	26	26	25	16	13	13	9	10
75	66	8	14	13	32	26	25	10	12	16	16	12	15
76	114	12	21	22	34	40	47	48	43	33	21	13	9
77	70	12	18	28	37	31	22	9	6	11	12	15	9
78	47	8	6	4	21	23	24	9	9	9	9	8	11
79	96	17	22	19	46	51	53	19	10	11	14	14	10
80	212	11	12	23	26	79	132	148	107	47	27	16	13
81	102	12	15	14	38	47	52	30	24	23	22	17	12
82	106	14	17	15	10	36	57	69	40	23	14	10	4

表 2.18: 渇水ルールの年間操作による被害 (1968 年)

	PAT01	PAT02	PAT03	PAT04	PAT05	PAT06	PAT07	PAT08	PAT09	PAT10	PAT11	PAT12	UN
0	1493.	963.	930.	1067.	1313.	1547.	1381.	1370.	1334.	1293.	1285.	1484.	1172.
1	1262.	824.	761.	898.	1247.	1482.	1315.	1304.	1268.	1228.	1146.	1253.	1107.
2	1123.	775.	663.	800.	997.	1313.	1147.	1135.	1100.	1059.	1048.	1203.	1085.
3	1101.	726.	614.	734.	931.	1215.	1048.	1037.	1002.	961.	1026.	1065.	840.
4	963.	587.	516.	636.	882.	964.	999.	988.	980.	939.	961.	1043.	818.
5	897.	489.	467.	587.	713.	795.	749.	966.	931.	890.	912.	977.	769.
6	646.	467.	401.	521.	638.	746.	727.	939.	903.	862.	890.	727.	741.
7	581.	445.	352.	418.	619.	648.	699.	917.	881.	840.	862.	661.	720.
8	412.	379.	333.	396.	570.	471.	531.	519.	854.	813.	835.	492.	692.
9	314.	330.	268.	396.	530.	444.	503.	492.	456.	562.	584.	465.	441.
10	265.	265.	246.	347.	502.	444.	405.	470.	434.	393.	415.	366.	273.
11	237.	243.	224.	298.	404.	422.	356.	372.	336.	295.	317.	339.	174.
12	215.	243.	197.	271.	301.	394.	334.	323.	287.	246.	268.	290.	125.
13	188.	224.	175.	219.	279.	354.	315.	301.	265.	224.	246.	268.	120.
14	182.	202.	153.	200.	251.	251.	310.	261.	225.	219.	241.	262.	98.
15	160.	175.	125.	196.	247.	247.	310.	242.	220.	212.	200.	222.	91.
16	155.	147.	125.	168.	247.	198.	310.	235.	213.	172.	194.	217.	91.
17	136.	147.	104.	146.	247.	198.	310.	230.	194.	165.	187.	177.	85.
18	136.	142.	125.	124.	198.	176.	235.	225.	188.	160.	182.	177.	79.
19	114.	136.	85.	103.	146.	124.	228.	218.	183.	160.	142.	170.	60.
20	108.	129.	78.	96.	140.	118.	188.	218.	183.	120.	120.	151.	60.

2.5.2 渇水ルールの有効性の検討

渇水ルールの有効性を検討してみよう。想定したパターン (3 か月) の渇水が起こるときに、そのパターンに対応する渇水ルールが他のルールよりも被害を小さくできるかどうかを調べる。

検討の方法として、1966 年から 1982 年までの 17 年間の福岡地点の月降水量データに基づいて得た月流入量系列 (前述。3 か月流入量を表 2.17 に示す。) を使って、平常ルール UNA と、12 個の渇水ルール PAT-1 から PAT-12 によって各年の操作を行い、評価関数 U によって渇水被害を算出する。なお、年頭の初期貯水量は 0 ~ 20 百万 m³ の範囲で動かした。

表 2.18~2.22 に 1968, 1971, 1973, 1978, 1981 年の結果を示した。表 2.17 とこれらの表より、年流入量のかなり少ない 1971 年, 1978 年は、流入量が少ないその期間の渇水ルール (1968 年の PAT-3; 1971 年は PAT-2, 3, 4; 1978 年は PAT-2, 3) が非常に有効である (被害が小さい) ことがわかる。初期貯水量が大きければ、平常ルール UNA も良い結果を与える。その他の年を見てみると、安定した流入量があれば (1973 年, 1981 年) 平常ルールが良い結果を与えるが、その安定した流入量系列の中に流入量が比較的少ない状況があるとその期間に対応する渇水ルールが他の渇水ルールよりも良い結果を与えることがわかる。

まとめると以下のようになる。

表 2.19: 渇水ルールの年間操作による被害 (1971 年)

	PAT01	PAT02	PAT03	PAT04	PAT05	PAT06	PAT07	PAT08	PAT09	PAT10	PAT11	PAT12	UNIAG
初期貯水位													
0	1270.	896.	806.	906.	1113.	1388.	1336.	1285.	1083.	1190.	1128.	1408.	1260.
1	1039.	757.	757.	841.	1015.	1219.	1167.	1116.	914.	1022.	989.	1177.	1091.
2	1017.	708.	659.	743.	846.	1121.	1069.	1018.	816.	923.	962.	1155.	1070.
3	995.	659.	610.	677.	846.	952.	1020.	969.	789.	896.	912.	1016.	1042.
4	856.	610.	544.	579.	797.	854.	992.	941.	739.	847.	847.	989.	916.
5	688.	544.	521.	560.	797.	805.	824.	919.	718.	825.	825.	967.	895.
6	660.	522.	456.	511.	722.	628.	726.	892.	690.	797.	803.	798.	867.
7	594.	500.	406.	481.	673.	601.	698.	870.	668.	776.	634.	733.	845.
8	496.	435.	406.	429.	570.	525.	676.	625.	423.	607.	607.	634.	677.
9	447.	413.	385.	380.	542.	497.	627.	603.	401.	509.	509.	585.	578.
10	425.	390.	357.	331.	514.	479.	627.	554.	352.	460.	460.	564.	529.
11	403.	363.	335.	303.	416.	376.	605.	532.	331.	438.	438.	536.	508.
12	363.	314.	308.	276.	397.	354.	471.	398.	406.	431.	431.	513.	501.
13	335.	314.	259.	276.	357.	354.	396.	398.	400.	409.	409.	415.	478.
14	330.	314.	237.	276.	336.	314.	396.	392.	400.	359.	409.	410.	473.
15	324.	286.	237.	253.	317.	265.	396.	392.	359.	353.	403.	403.	466.
16	275.	237.	237.	231.	265.	213.	377.	385.	353.	347.	398.	398.	297.
17	268.	231.	237.	209.	216.	191.	355.	385.	347.	342.	391.	357.	292.
18	268.	231.	228.	188.	194.	191.	349.	379.	326.	302.	351.	357.	194.
19	262.	225.	221.	181.	188.	185.	342.	358.	250.	244.	302.	351.	145.
20	262.	225.	221.	181.	188.	185.	342.	358.	250.	244.	302.	351.	145.

表 2.20: 渇水ルールの年間操作による被害 (1973 年)

	PAT01	PAT02	PAT03	PAT04	PAT05	PAT06	PAT07	PAT08	PAT09	PAT10	PAT11	PAT12	UNIAG
初期貯水位													
0	641.	568.	492.	446.	356.	326.	334.	284.	305.	283.	420.	675.	202.
1	410.	429.	394.	427.	352.	277.	334.	265.	277.	255.	281.	444.	175.
2	388.	411.	329.	444.	303.	272.	306.	237.	273.	234.	259.	423.	153.
3	360.	345.	323.	378.	254.	254.	306.	233.	250.	194.	237.	284.	137.
4	222.	296.	274.	280.	231.	254.	266.	233.	228.	172.	172.	265.	115.
5	200.	247.	225.	231.	231.	226.	214.	211.	228.	153.	153.	243.	115.
6	200.	242.	159.	209.	231.	226.	193.	183.	201.	125.	131.	222.	88.
7	134.	220.	155.	209.	203.	177.	165.	183.	161.	104.	112.	156.	66.
8	129.	155.	127.	204.	199.	154.	143.	162.	139.	85.	85.	150.	60.
9	110.	127.	127.	177.	150.	127.	143.	161.	121.	80.	79.	132.	60.
10	105.	105.	127.	177.	122.	122.	124.	139.	99.	73.	73.	127.	54.
11	105.	105.	105.	128.	122.	100.	120.	99.	92.	55.	54.	99.	48.
12	100.	105.	78.	100.	100.	100.	98.	92.	92.	49.	49.	99.	44.
13	72.	100.	56.	95.	78.	100.	98.	73.	73.	49.	49.	93.	38.
14	72.	100.	51.	95.	78.	95.	98.	69.	69.	44.	44.	87.	38.
15	65.	73.	45.	95.	73.	73.	75.	69.	63.	37.	44.	87.	31.
16	61.	67.	45.	73.	73.	73.	69.	62.	57.	37.	39.	82.	31.
17	54.	61.	39.	66.	66.	66.	62.	57.	57.	32.	32.	76.	26.
18	54.	61.	39.	66.	66.	66.	62.	57.	57.	32.	32.	76.	26.
19	54.	61.	39.	66.	66.	66.	62.	57.	57.	32.	32.	76.	26.
20	54.	61.	39.	66.	66.	66.	62.	57.	57.	32.	32.	76.	26.

表 2.21: 渇水ルールの間操作による被害 (1978 年)

	PAT01	PAT02	PAT03	PAT04	PAT05	PAT06	PAT07	PAT08	PAT09	PAT10	PAT11	PAT12	UNIAG
0	2008.	1845.	1865.	1958.	2061.	2237.	1978.	1966.	2051.	2207.	2275.	2476.	2170.
1	1777.	1706.	1696.	1860.	1892.	2172.	1912.	1900.	1985.	2141.	2137.	2245.	2104.
2	1608.	1608.	1446.	1609.	1826.	2003.	1743.	1732.	1816.	1973.	2038.	1995.	1935.
3	1543.	1469.	1277.	1543.	1728.	1905.	1645.	1634.	1718.	1875.	1989.	1856.	1837.
4	1404.	1371.	1179.	1375.	1478.	1856.	1596.	1584.	1669.	1825.	1924.	1790.	1788.
5	1355.	1121.	1010.	1309.	1309.	1605.	1345.	1334.	1418.	1575.	1673.	1622.	1537.
6	1257.	952.	944.	1058.	1211.	1436.	1176.	1306.	1391.	1547.	1645.	1523.	1510.
7	1191.	903.	846.	889.	960.	1338.	1149.	1137.	1363.	1520.	1477.	1458.	1482.
8	1142.	837.	780.	791.	911.	1087.	1121.	1110.	1195.	1351.	1449.	1430.	1460.
9	1120.	771.	731.	693.	742.	1060.	1023.	1012.	1096.	1253.	1351.	1408.	1215.
10	1092.	722.	633.	644.	715.	891.	974.	963.	1075.	1231.	1329.	1359.	1193.
11	1071.	624.	584.	541.	715.	863.	723.	941.	1025.	1182.	1280.	1332.	1144.
12	820.	602.	556.	514.	665.	814.	701.	919.	1004.	1160.	1258.	1310.	1122.
13	792.	581.	507.	563.	638.	716.	533.	521.	606.	909.	1007.	1059.	872.
14	624.	553.	480.	563.	589.	540.	435.	500.	584.	741.	839.	890.	703.
15	525.	525.	382.	535.	589.	491.	385.	401.	486.	734.	832.	792.	696.
16	476.	476.	360.	486.	491.	469.	364.	395.	479.	727.	734.	743.	690.
17	454.	454.	338.	437.	388.	420.	364.	346.	473.	629.	727.	721.	592.
18	449.	356.	316.	385.	366.	317.	364.	339.	424.	580.	678.	715.	543.
19	449.	356.	316.	336.	366.	317.	357.	317.	402.	558.	656.	709.	537.
20	442.	316.	297.	287.	314.	268.	317.	317.	326.	553.	651.	639.	515.

表 2.22: 渇水ルールの間操作による被害 (1981 年)

	PAT01	PAT02	PAT03	PAT04	PAT05	PAT06	PAT07	PAT08	PAT09	PAT10	PAT11	PAT12	UNIAG	
初期貯水位	0	640.	646.	635.	537.	472.	308.	210.	182.	201.	207.	362.	659.	182.
	1	409.	507.	466.	486.	406.	259.	161.	133.	152.	158.	223.	426.	133.
	2	343.	368.	466.	488.	406.	259.	161.	133.	152.	158.	223.	362.	133.
	3	321.	368.	417.	423.	308.	259.	161.	133.	152.	158.	223.	223.	133.
	4	183.	319.	319.	357.	308.	259.	161.	133.	152.	158.	158.	201.	111.
	5	183.	319.	319.	259.	308.	259.	161.	133.	124.	130.	130.	180.	84.
	6	161.	270.	254.	259.	259.	259.	133.	106.	97.	102.	108.	152.	56.
	7	95.	204.	188.	259.	259.	210.	105.	78.	97.	81.	86.	86.	56.
	8	95.	139.	188.	210.	259.	161.	105.	56.	75.	59.	59.	86.	34.
	9	68.	117.	139.	188.	210.	133.	105.	34.	53.	59.	59.	86.	34.
	10	68.	117.	139.	188.	182.	105.	84.	56.	75.	59.	59.	86.	34.
	11	68.	95.	117.	139.	133.	105.	84.	34.	53.	59.	59.	59.	34.
	12	68.	95.	89.	111.	105.	105.	84.	34.	53.	59.	59.	59.	34.
	13	40.	68.	62.	133.	105.	105.	62.	34.	53.	59.	59.	59.	34.
	14	40.	62.	62.	105.	105.	84.	62.	34.	53.	52.	52.	59.	28.
	15	34.	34.	56.	84.	105.	84.	40.	34.	47.	45.	52.	53.	21.
	16	29.	34.	34.	84.	84.	84.	40.	28.	40.	45.	47.	48.	16.
	17	23.	34.	34.	84.	84.	84.	40.	21.	40.	45.	40.	41.	10.
	18	23.	34.	34.	62.	84.	84.	40.	21.	40.	40.	34.	36.	10.
	19	17.	29.	34.	40.	62.	62.	33.	21.	34.	34.	29.	36.	5.
	20	17.	29.	34.	40.	62.	62.	33.	16.	34.	34.	29.	36.	5.

表 2.23: 平常ルールから渇水ルールへ切り替える時期の早遅による渇水被害の比較

3 か月渇水 開始月 M	渇水ルールへの切り替え時期							平常ルール UNA
	その月から	1 か月前	2 か月前	3 か月前	4 か月前	5 か月前	6 か月前	
1	1903695	1903362	1903030	1903029	1903029*	1903027*	1903025*	1903714
2	1904813	1904743	1904391	1904065	1904063	1904074*	1904072*	1904771
3	1903240	1903239	1903156	1902791	1902473	1902441	1902443*	1903106
4	1905577	1905538	1905535	1905460	1905103	1904822	1904811	1905509
5	1904441	1904396	1904391	1904394	1904358	1904039	1903705	1904417
6	1905442*	1905383	1905399	1905395	1905406	1905365	1905033	1905386
7	1905447*	1905459*	1905415	1905411	1905411	1905410	1905367	1905398
8	1903408*	1903437*	1903467*	1903440	1903440	1903418	1903415	1903384
9	1904404*	1904415*	1904421*	1904435*	1904416	1904414	1904415	1904390
10	1903085	1903094*	1903098*	1903098*	1903098*	1903075	1903075	1903063
11	1903046	1903060	1903060*	1903061*	1903061*	1903061*	1903054	1903048
12	1903719	1903706	1903720	1903708*	1903718*	1903718*	1903718*	1903708

1. 年流入量の少ないときには (60 百万 m^3 以下), その年のうちで特に少ない時期に対する渇水ルールが年間通じて被害を相対的に小さくできる。
2. 年流入量が平年並み (70 から 80 百万 m^3) あるいはそれを少し下回る程度 (60 から 70 百万 m^3) であれば, 流入量が極端に少ない月が 1, 2 か月あっても, 年間操作において平常ルールが渇水ルールより良い結果を与える。
3. ある時点で貯水量が小さく, 近い将来渇水が予測されるときは, 渇水ルールを貯水量が回復するまで用いるとよい。

これらのことより渇水ルールの有効性が検証された。また, 平常ルールの性能の良さも同時に確認された。

2.5.3 渇水予測による渇水ルールへの切り替え

渇水ルールの有効性が確かめられたので, 渇水に対応するための操作方式として, 普段は平常ルールに基づいて操作を進めてゆき, 渇水が予測されたらその期間・規模に応じた渇水ルールに切り替え, 渇水状態を脱した時点で平常ルールに戻す, という操作方式が有効であるように思われる。

この項では, 渇水が予測される場合いつから渇水ルールに切り替えればよいかという問題について考察する。言い換えると, 何か月前に渇水が予測できると被害軽減に有利かということを検討するわけである。

方法としては, 検討用の流入量系列に対して, まず平常ルールで操作を始め, 渇水期の j か月前になればその渇水期に対応する渇水ルールに切り替えて 1 年間操作する。そしてまた計画ルールに戻して操作する。これらのことを $j = 0, 1, \dots, 6$ の 7 通り行う。

検討用の流入量系列は, 4 年間 (48 か月) にわたるものとし, 初年, 3 年目, 4 年目は, 各月流入量の確率分布の図 (図 2.5) から求めた各月の平均的な流入量の系列とする。2 年目は, 年総流入量がリターンピリオド 20 ~ 30 年程度の渇水年を想定し, その年内にリターンピリオド 50 年程度の 3 か月流入量を含むものとする。このような条件に一致する渇水年を, 前述の 10,000 年の流入量系列から抽出する。まず, 年流入量が $1/20 \sim 1/30$ 確率程度の年をすべて抽出し, そのうち $1/50$ 確率程度の 3 か月流入量系列が表 2.16 のそれと適合するもの (たとえば, 3 ~ 5 月が 1, 2, 2 百万 m^3 という流入量系列を含む年) を選び出した。

こうして抽出された流入量系列を含む 4 年の検討用系列に対して上記の方法で操作を行い, 評価関数 U で渇水被害を算定した。表 2.23 にその結果を示した。

この結果によれば, 早期に切り替えた方が被害が少なくなる傾向がみられる。早期に切り替えた場合, 切り替えから渇水開始の間に灌漑期 (6 ~ 9 月) が入ると (表 2.23 の * 印の部分), 灌漑期に節水しようとするため評価値は悪くなるが, そうした場合を除けば, 渇水予測が可能なら切り替えは早い方がよい。

しかしながら, 早い時期の渇水予測は精度が悪く, 誤判断となりかねない。したがって, 切り替えが早ければ早いほど良いというのではなく, その最適な時期は, 切り替えの早さによって軽減できる被害と渇水予測の精度との兼ねあいのなかで決定されなければならないのである。

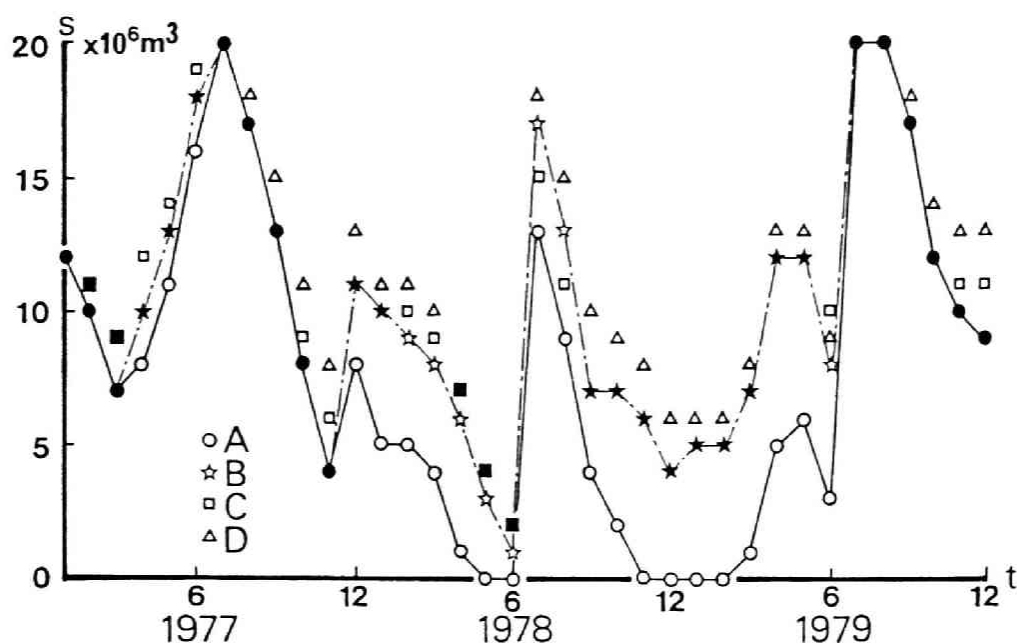


図 2.9: 貯水量の変化の比較 (黒印は重複を示す)

2.6 切り替え方式の 53 年渇水への適用

これまで求めた平常ルール、渇水ルールを用いて渇水時の貯水池操作を模擬してみよう。流入量系列は、上述の 1966 ~ 1982 年のデータより、1977 年 1 月から 1979 年 12 月までのものを用いる。この期間に福岡地域で起こった渇水 (昭和 53 年 (1978 年) 渇水) は、その規模の大きさによりあまりにも有名である。この 3 年間の中で、特に 1977 年 9 月から 1978 年 5 月までは流入量が非常に少ない状況であった。

この渇水時の流入量系列に対して、いくつかの操作方式を考えてみた。

方式 A) 全期間平常ルール UNA を用いる。

方式 B) 現在 (m 月初め) の貯水量が 10 百万 m^3 以上ならば平常ルール UNA、それより少なければ渇水ルール PAT- m を用いる。

方式 C) 現在から 1 か月先までの流入量が精度良く予測されているという想定のもとに、需要量と同じだけ放流すると 1 か月後の貯水量が 10 百万 m^3 を下回ってしまう場合は渇水ルール PAT- m を、そうでなければ平常ルール UNA を用いる。

方式 D) 現在から 3 か月先までの流入量が精度良く予測されているという想定のもとに、需要量と同じだけ放流すると 3 か月後の貯水量が 10 百万 m^3 を下回ってしまう場合は渇水ルール PAT- m を、そうでなければ平常ルール UNA を用いる。

操作の評価は、評価関数 J (渇水被害) および不足 %・月 (すなわち、評価関数 $R \times 100$) それぞれの累加値である。評価期間は、1977 年 1 月から大きな流入量があり貯水量が満杯に回復する 1979 年 6 月までとする。初期貯水量は、当時の貯水池のデータ (水利科学研究所 (1980b)) から 12 百万 m^3 とした。

結果を図 2.9 と表 2.24 に示す。図 2.9 は、各操作方式による貯水量の推移を示したものである。図中黒塗の印は重複を表している。表 2.24 には、操作の評価値を、評価期間全体 (1977 年 1 月から 1979 年 6 月) と、特に流入量が少なかった 1977 年 11 月から 1979 年 1 月までの二つの期間について示した。

これらの結果から次のようなことが言える。

1. 3 か月先までの流入量が的確に予測される方式 D は、最小の被害を示し、その次が 1 か月先までの予測が可能な C である。すなわち、流入量予測が早くからの的確になされれば被害をかなり軽減できる。
2. 不足 % の指標では、平常ルールですべて操作を行う A が最も良いが、図 2.9 に示されているように、貯水池が空になる月が合計 6 か月もあり、大きな被害を生じることになる。

表 2.24: 操作方式の比較評価

方式	全期間 (1977.1~1979.6)		部分期間 (1977.11~1979.1)	
	被害	不足 %・月	被害	不足 %・月
A	1808	783.3	1671	564.9
B	1740	881.6	1378	617.8
C	1647	926.2	1179	602.4
D	1475	895.8	1073	589.9

3. 流入量の予測を用いなくても、B のような簡単な方式で A よりも被害の軽減が可能であり、渇水ルールに移行する貯水量の基準値 (上の例では、10 百万 m^3 とした) を変えれば、さらに被害を軽減できる可能性がある。C, D でも同じことが言える。

結局、このような簡単な切り替え方式によっても有効な渇水対策が可能である。以上の検討から、渇水ルール、流入量予測の重要性が指摘できる。渇水被害の軽減のためには、平常ルールと渇水ルールの切り替えが早期に適切に行えるかという点がポイントとなる。

2.7 結 語

水利用の高度化にともない、河川流量の安定供給を図り渇水時の水不足による被害の軽減を目的とする貯水池群の低水管理はますます重要となってきた。このためには、将来の貯水池流入量を正確に把握し、適切な貯水池操作を行わねばならない。

本章では、利水用貯水池の年間を通じた運用計画および計画規模を超える渇水時の特別な操作方式について検討した。

流域 (利水システム) 内の水量が十分に存在しない渇水状況においては、降雨および流入量予測と流域内全体の水量の当面の (渇水状態から脱するまでの) 時間配分がまず問題となる。時間配分を決めたあとで、地域間・用途間の配分を考えることになる。こうした意味で、渇水を想定した場合には時間配分のみに問題を単純化して扱うことができる。よって、流域内の貯水池群を単一貯水池とみなして議論を進めた。

貯水池への流入量系列は、降水量に依存するが、わが国の場合、それは年ごと月ごとに大きく変動するのが普通である。こうした流入量系列に対し、各時点での最適な操作を求めるための手法として確率 DP を採用し、年間の貯水池操作ルール (“平常ルール” と呼んだ) を求めた。これが年間を通じた運用計画になる。

確率 DP などの最適化手法を用いる際に問題となるのは評価関数 (目的関数) の取り扱いである。ここでは、10 種の評価関数を設定し、評価関数が異なれば、求められる操作ルールが大きく変わることを示した。シミュレーションにより、平常ルールの性能の比較を行った結果、評価関数として望ましいのは、需要の多寡 (たとえば、需要が倍増する灌漑期と非灌漑期の区別など) が考慮でき、不足率 (制限率) が増えるにつれて非線形的に評価値が悪化するような形式のものであることがわかった。なお、ルールの性能評価には、信頼度、回復度、深刻度といったシステムの信頼性評価の規準を用いた。

次に、渇水時の操作方式について述べる。計画規模 (10 年確率) を超過する渇水として 50 年確率に相当する 3 か月流入量を考え、想定する期間の流入量系列を 50 年確率に相当する 3 か月流入量の系列と置き換え、再び確率 DP を適用することにより、その渇水期間用の特別なルール (“渇水ルール” と呼んだ) を求めた。平時 (渇水でないとき) は “平常ルール” に基づいて貯水池操作を行い、渇水が想定されるときにはその期間に対応する予め上のようにして求めておいた “渇水ルール” に切り替える、といった簡単で実用的な操作方式を提案した。シミュレーションによって発生させた 10,000 年間の流入量系列を用いて、平常ルールから渇水ルールにいつ切り替えるべきか、渇水ルールの採用の仕方をどうするか、といった点について検討した。こうした操作方式の有効性を検証するとともに、流入量予測の重要性についても例証した。

参 考 文 献

- Duckstein, L. and E.J. Plate, ed. (1987): Engineering Reliability and Risk in Water Resources, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.
- Hashimoto, T., J.R. Stedinger and D.P. Loucks (1982): Reliability, Resiliency, and Vulnerability Criteria for Water Resource System Performance Evaluation, Water Resources Research, Vol. 18, No. 1, pp. 14-20.
- 池淵周一・小尻利治・武村彰文 (1987): 確率マトリックス演算による利水システムの安全度評価, 京都大学防災研究所年報, 第 30 号 B-2, pp. 359-375.
- 今村瑞穂・大内忠臣 (1982): 水資源管理における 利水安全度, 第 2 回 水資源に関するシンポジウム前刷集, pp. 503-508.
- 神田 徹 (1975): 水資源計画における貯水池最適操作に関する研究, 大阪大学学位論文, 237pp.
- 建設省土木研究所 (1979): 渇水時の水管理に関する計画学的研究, 土木研究所資料, 第 1508 号, 245pp.
- 気象庁 (編) (1984): 異常気象レポート '84, 大蔵省印刷局, 294pp.
- 小尻利治・池淵周一・飯島 健 (1987): 利水システムの安全度評価 に関する研究, 土木学会論文集, 第 381 号 / II-7, pp. 91-100.
- 国土庁長官官房水資源部 (編) (1988): 昭和 63 年版日本の水資源 — その開発, 保全と利用の現状 —, 大蔵省印刷局, 282pp.
- Little, J.D.C. (1955): The Use of Storage Water in a Hydroelectric system, Operations Research, Vol. 3, No. 2, pp.187-197.
- 松野太郎・新田 勅 (1989): 異常気象レポート '89, Newton, 第 9 巻 第 5 号 (1989 年 4 月号), pp. 36-51.
- Moy, W.-S., J.L. Cohon and C.S. ReVelle (1986): A Programming Model for Analysis of the Reliability, Resilience, and Vulnerability of a Water Supply Reservoir, Water Resources Research, Vol. 22, No. 4, pp. 489-498.
- 中川芳一 (1984): 水資源の開発・配分計画に関するシステム論的研究, 京都大学学位論文, 161pp.
- 中村 昭 (1976): 確率 DP を用いた貯水池の放流目標の決定法, 土木技術資料, 18-8, pp. 411-416.
- 志村博康 (1982): 現代水利論, 東大出版会, pp. 143-161.
- 水利科学研究所 (1980a): 渇水対策検討業務委託報告書, 246pp.
- 水利科学研究所 (1980b): 水経済年報 1980 年版, pp. 313-401.
- 高棹琢馬・池淵周一・小尻利治 (1975): 水量制御からみたダム群のシステム設計に関する DP 論的研究, 土木学会論文報告集, 第 241 号, pp.39-50.
- 高棹琢馬・池淵周一・小尻利治 (1978): 多ダム 多評価地点系の最適操作に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第 21 号 B-2, pp. 193-206.
- 高棹琢馬・瀧能邦雄 (1970): ダム群による洪水調節に関する研究 (I)—DP の利用とその問題点 —, 京都大学防災研究所年報, 第 13 号 B, pp. 83-103.
- 竹内邦良 (1974): 貯水量の累加損失係数を用いた 貯水池群の最適操作手法, 土木学会論文報告集, 第 222 号, pp. 93-103.
- Takeuchi, K. (1986): Chance-Constrained Model for Real-Time Reservoir Operation Using Drought Duration Curve, Water Resources Research, Vol. 22, No. 4, pp. 551-558.
- 富田 茂・竹内邦良・山本 修 (1984): 確率 DP と DDC による給水用貯水池の操作の比較, 土木学会第 39 回年次学術講演会, II-69.

第3章

渇水対策ダムをもつ利水システムの性能評価

前章では、既存の利水システムのもとで、システムの運用により渇水被害をなるべく食い止めようとする方策、すなわち、いわゆるソフトな対策について検討し、管理安全度がどの程度向上し得るのかを明らかにした。

一方、ハードな対策として一番初めに考えられるのが、貯水池を建造して流域の貯水容量を増やすことである。特に、計画規模を超える渇水に対応するために、渇水対策容量をもつダム（「渇水対策ダム」）の整備が計画されつつある。本章では、この渇水対策ダムの導入により当該利水システムの信頼性（計画安全度）がどの程度向上し得るのかを明らかにしようとする。対象流域は、前章と同じく福岡市域であり、前章で用いた条件・データ等がそのまま利用される。

3.1 渇水対策ダムの概要

渇水対策ダムは、既存の利水システムは現在の基準である 1/10 渇水に対処し得るようにしておいて、それを超過する渇水に対して予備的に容量を追加しておくものであって、通常の利水容量の他に、異常渇水時において社会生活を維持するために必要最小限の生活用水・都市活動用水等を供給する容量をもつものである。渇水対策ダムの構想は、少なくとも昭和 53 年（1978 年）の三全総の頃には打ち出されていた。建設省の「昭和 65 年にむけての水資源開発と水利用」（建設省河川局（1979））には、異常渇水対応策の確立と推進の節（3-4 節）で、異常渇水用ダムの事業化を対策の一つに挙げている。すなわち、「洪水を経年的に貯留し、異常渇水時にこれを利用するダムについて、その事業化のため調査・研究を進め事業化を図る」とされており、当初は「経年貯留ダム」と呼ばれることが多かった。

その後、渇水対策ダムについての調査・研究は建設省を中心に進められており（中安・松下（1984）、建設省河川局河川計画課・建設省土木研究所（1986））、昭和 63 年（1988 年）に、わが国で初めての渇水対策容量をもつダムが建設採択されるに至った（蒲池（1988））。

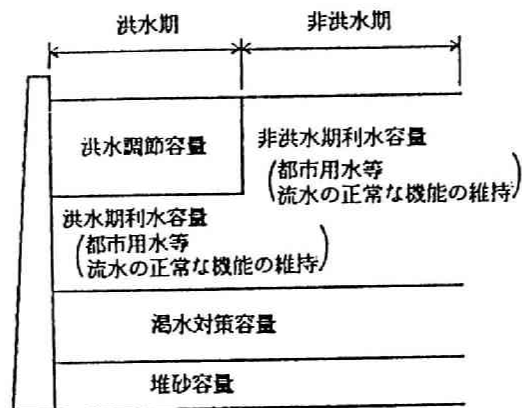
図 3.1 は、渇水対策ダムの容量配分を示したものである。渇水対策ダムは現在のところまだ完成ダムがないので、補給ルールは確立されておらず、目下建設省により検討の途上である。渇水対策容量をどのように運用するかは、通常容量の運用とも関わる問題である。表 3.1 は、通常ダムと渇水対策ダムを統合した運用方法のいくつかを示したもの（建設省河川局河川計画課・建設省土木研究所（1986））であって、表中のモデル図で、左側の斜線部は通常ダムからの取水を、右側の黒塗の部分は渇水対策ダムからの補給を示す。ケース 1 は、通常ダムは節水せず不足分を渇水対策ダムから補給するものであるが、その補給は 100% の補給ではなく、一定率節水補給（ケース 1-a）あるいは段階的節水補給（ケース 1-b）を行う。ケース 2 は、通常ダムは段階的節水を行い、その節水分を渇水対策ダムで全量補充しようというもので、トータルとしての節水は見込んでいない。ケース 3 とケース 4 は、これらの折衷型のルールであるが、どちらもある程度の節水を見込んでいる。

いずれにせよ、この渇水対策ダムは利水システムの新しい形態であるので、その容量決定、上記のような運用方法、利水安全度および経済効果の評価など研究課題は多い。

本章では、渇水対策ダムを導入した場合に、トータルとしての利水システムの性能（利水安全度）がどの程度向上するかを、前章と同様のシミュレーションにより検討する（高棹・宝・丸川（1989））。

3.2 システム性能評価の規準

システム性能の評価規準として、前章と同様、信頼度、回復度、深刻度を採用する。いずれも各月の需要を満たすかどうかという観点からこれらの規準の評価値を算定する。すなわち、2.4.2 で述べた信頼度 α_1 ((2.7) 式)、回復



渇水対策容量は、通常の治水容量、利水容量の下に
通年容量として確保し、通常の利水運用では、使用
せずに備蓄を図り、異常渇水時のみに使用するもの
である。

図 3.1: 渇水対策ダムの容量配分の一例

表 3.1: 渇水対策ダムの節水ルール

ケース	節 水 ル ー ル	モ デ ル 図
1	1-a) 通常ダムがパンクしたとき (通常ダム節水なし はじめて渇水対策ダムを運用 (渇水対策ダムによる節水率は一定率) 1-b) 同 上 (通常ダム節水なし 渇水対策ダムによる節水率は段階的節水)	
2	通常ダムは段階的節水を行い、不足量に対して渇水対策ダムで全量補給する。	
3	通常ダムは段階的節水を行い、渇水対策ダムは一定節水率を確保する。	
4	通常ダムおよび渇水対策ダムいずれも段階節水運用を行う	

表 3.2: 渇水対策ダムをもたない場合 (昭和 52 年) の利水安全度指標の値

	信頼度 α_1	回復度 γ_1	深刻度 $\nu(1.0)$	深刻度 $\nu(2.0)$
1 月	0.7434	0.2144	0.1194	0.0658
2 月	0.7027	0.1750	0.1390	0.0777
3 月	0.6362	0.1689	0.1850	0.1127
4 月	0.6840	0.3601	0.1454	0.0822
5 月	0.6364	0.2522	0.1892	0.1196
6 月	0.8554	0.7041	0.0633	0.0355
7 月	0.8870	0.5450	0.0514	0.0298
8 月	0.8318	0.2159	0.0915	0.0614
9 月	0.8917	0.5707	0.0473	0.0265
10 月	0.8613	0.2410	0.0723	0.0458
11 月	0.8032	0.0908	0.1040	0.0657
12 月	0.7500	0.1143	0.1257	0.0747
通年	0.7736	0.3224	0.1111	0.0664
灌漑期	0.8665	0.5766	0.0634	0.0383
非灌漑期	0.7272	0.2182	0.1350	0.0805

度 γ_1 ((2.9) 式) および深刻度 $\nu(\beta)$ ((2.10) 式) である。ただし、深刻度については $\beta = 1.0$ と $\beta = 2.0$ の二通り考えた。これらは、よく用いられる、不足 % および (不足%)² に相当するものである。

3.3 昭和 53 年時点の利水システムの安全度

福岡市では、昭和 53 年 (1978 年) に渇水により大きな被害を受けたのであるが、その時点での利水システムの安全度はどうであったのだろうか。この点については、既に前章で一応の検討は済ましている。すなわち、表 2.11、表 2.14、図 2.7 などがそうであり、それらの図表に示した 4 種のルールのうち、なるべく需要を満たすようにどんどん放流するルール Q1 の利水安全度を参照すべきである。その結果を再整理すると表 3.2 のようになる。

3.3.1 信頼度について

各月の信頼度を見ると、灌漑期に入る前の 3 月から 5 月には信頼度は 0.7 を割り込んでおり、この時期にかなりの雨量が続かないと、灌漑期初頭に貯水池を満杯にしておくという理想的な状況の実現がしにくいと言える。実際、表 2.13(a) で見たように、6 月初頭には、貯水量が全貯水量 20 百万 m^3 に対して 16 百万 m^3 以上となる確率がやっとな 0.1 を超えるに過ぎず、枯渇する確率が 4 割を超えている。6 月から 10 月にかけては信頼度は 0.85 から 0.9 程度であり、1/10 確率 (信頼度 0.9) を若干下回る程度となっているが、上の考察からわかるように、これはこの時期の流入量の多さ (平均的な意味での) に支えられているにすぎないのである。要するに、当時の利水システムがいかに貧弱であったかが窺われる。

3.3.2 回復度について

表 3.2 の左から二つ目の欄には、回復度を示した。これは前月需要を満たさなかったのが、この月に満たすようになる確率を示している。図 2.5 に見られるように、11 月から 3 月にかけては流入量が少ないので、回復度も非常に悪い (0.1 から 0.2 程度である)。回復度が比較的良好なのは、6、7、9 月であり、これらの月は流入量が多い。要するに、回復度は基本的には流入量に依存する。

3.3.3 深刻度について

表 3.2 の深刻度 $\nu(1.0)$ は不足率を表している。通年で $\nu(1.0) = 0.1111$ であるから、平均して常に 11% 程度の水不足があるということになる。単純計算すると、年間 $365 \times 11 \approx 4000$ % 日の被害があることになる。ただ

サーチャージ水位 E.L. 412.00m		有効貯水容量 39,700,000m ³	総貯水容量 40,200,000m ³	
洪水調節容量	8,000,000m ³			
常時満水位 E.L. 405.70m				
利水容量	15,100,000m ³			
{	・流水の正常な機能の維持			12,500,000m ³ ※1
	・水道用水			2,600,000m ³
渇水対策水位 E.L. 391.50m				
渇水対策容量	16,600,000m ³ ※2			
{	・流水の正常な機能の維持			2,700,000m ³
	・都市用水			13,900,000m ³
最低水位 E.L. 344.50m				
堆砂容量	500,000m ³			
基礎地盤 E.L. 315.00m				

図 3.2: 五ヶ山ダムの容量配分

しこれは、既存のダムに依存する分だけの計算であり、53 年渇水時の 8160 不足 % 日と直接比較するには問題がある。 $\nu(2.0)$ は、 $\nu(1.0)$ と同様の月変化を示しており、特筆すべき差異は見られない。

3.4 渇水対策ダム導入の効果 — 昭和 53 年 (1978 年) のシステムに導入した場合

53 年渇水以後、今日までの 10 年余りの間に、福岡市においては種々の渇水対策が講じられてきた (上田 (1983), 蒲池 (1988))。渇水対策ダム導入の効果を調べるには、それらの対策の効果をも取り込むことが必要であるが、その前にここでは、昭和 53 年の利水システムの状態にいきなり渇水対策ダムを導入したらどうなるか、という仮想的な検討を行っておく。

3.4.1 渇水対策ダムの容量について

既存の利水システムの総貯水量 (これをここでは V_0 と記す) が $V_0 = 20$ 百万 m^3 であったので、その倍の容量まで段階的にいくつかの容量を調べる。すなわち、渇水対策ダムの容量を V_1 と書くことにして、 $V_1 = 4, 8, 12, \dots, 40$ 百万 m^3 の 10 通りとする。ちなみに、この度建設採択になった五ヶ山ダムの容量は、図 3.2 に示すように、有効貯水容量が 39.7 百万 m^3 、渇水対策容量は 16.6 百万 m^3 であり (蒲池 (1988))、上記の範囲でカバーされている。

3.4.2 渇水対策ダムへの流入量について

渇水対策ダムへの流入量は、基本的にはそのダムの空間的位置によっておのずと定まる集水面積、降水流出特性によって規定される。ここでは、どこにどの程度の規模のものを作るかを予め想定しないという立場から、これらを総合的に表すパラメータ r を導入して便宜的に取り扱うことにする。すなわち、既設ダムへの流入量が X_0 のとき、渇水対策ダムへは $X_1 = rX_0$ だけ流入量があるとする。この仮定は、大胆ではあるが、言い換えるとこの地域における水文条件の regionalization (地域総合化) の可能性を仮定したことになる。すなわち、降水条件が既設ダムのそれとほぼ同等であるという仮定のもとに、流出特性が既設ダムと同等であるとみなせば r は既設ダムの集水面積に対する比を表すことになり、集水面積が既設ダムと同じであるとみなせば r は既設ダムの流出率に対する比を表すことになる。結局、 r は、渇水対策ダムへの流入量 X_1 と既設ダムへの流入量 X_0 との比であり、便宜上“流入率”と呼んでおくことにする。ここでは、 $0 < r \leq 2$ とすることにし、以下のシミュレーションでは、 $r = 0.1, 0.2, \dots, 2.0$ の 20 通りの値を設定した。

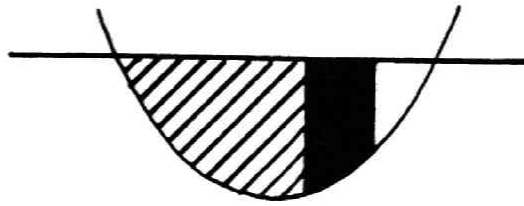


図 3.3: 渇水対策ダムの運用方式 (ケース 5; cf. 表 3.1)

3.4.3 渇水対策ダムの運用方式について

この節の最初に表 3.1 で示したように、渇水対策ダムの運用方式は、既設ダム（通常ダム）の操作との絡みもあり、種々のものが考えられる。ここでは、表 3.1 のケース 2 に相当する方式のみを考えることにする。すなわち、“全量補給方式”とでも言える方法である。上述のように、この時点の当地域の利水システムはかなり貧弱であり、このシステムに対して望ましいと思われる貯水池操作は、前章でみた通り、平常ルールでさえ貯水池（既設の）が満杯であっても需要通り放流しない方がよいというものであった（平常ルール UNA）。渇水対策ダムの導入がもたらす利水安全度の向上を調べる際には、既設ダム（通常ダム）でも節水し渇水対策ダムでも節水するというような状況を考える前に、まず、渇水対策ダムの能力をフルに発揮させたらどうなるかを考えるのが素直であろう。

したがって、とりあえずここでは、表 3.1 のケース 1, 3, 4 のような運用を考えず、ケース 2 のような運用を行うこととする。ただし、厳密に言えば、以下での取り扱いとは図 3.3 に示すような運用方法である。すなわち、通常ダムがパンクしたら、渇水対策ダムで全量補給する。通常ダムと渇水対策ダムを合わせたトータルとしての利水システムの安全度を考えるときは、この運用方法とケース 2 の方法とは等価である。両者の違いは、通常ダムと渇水対策ダムの貯水量の変動の内容が異なるだけである。したがって、通常ダムの貯水量の変動を問題とする場合は、両者は明確に区別されねばならない。以下、図 3.3 のような運用方法を“ケース 5”と呼ぶことにしよう。

3.4.4 結果と考察

上記の通り、渇水対策ダムの貯水容量 V_1 を 10 段階、流入率 r を 20 段階設定し、これらの 200 通りの組合せについて貯水池操作のシミュレーションを行う。流入率系列は、前章の検討と同じ 10,000 年の月流入率系列を用いる。初期貯水量は、既設ダムが満杯（20 百万 m^3 ）、渇水対策ダムが空とする。既設ダムの初期貯水量の多寡は、10,000 年もの長期にわたるシミュレーションでは評価結果にはほとんど影響がない。

a) 信頼度について

図 3.4 は、渇水対策容量 V_1 を横軸に、流入率 r を百分率で表示して縦軸にとり、200 個の各標本点に 通年の信頼度 α_1 をプロットし、その等高線を引いたものである¹。図で右上方へいくにつれて（貯水量が大きく、流入率が高くなるにつれて）、信頼度は高くなっていく。右上隅の 0.99999 と記した領域は、信頼度 $\alpha_1 \approx 1$ となる領域で、ここでは需要を満たさないことがない（厳密には、10,000 年のうち 1 か月だけ水不足が起こったものも含んでいる）。なお、等高線が必ずしもなめらかでないのは、標本点が離散していること、流入率 r をかけて渇水対策ダムへの流入量を算出する際に四捨五入して百万 m^3 単位で求めることに起因する。

降雨流出の条件が既設の貯水池と同一だと仮定すれば、流入率が既設ダムの集水面積 $A_0 = 77 \text{ km}^2$ に対する渇水対策ダムの集水面積 A_1 の比を表すことになる。よって、1/10 確率の利水安全度 ($\alpha_1 = 0.9$) を確保するためには、既設ダムと同程度の集水面積をもつような渇水対策ダム ($A_1 = A_0$) ならば、 $V_1 = 4$ 百万 m^3 の容量が必要であり、1/4 程度の集水面積のものであれば、 $V_1 = 7$ 百万 m^3 の容量が必要であることなどが、この図から読み取れる。ちなみに、五ヶ山ダムは集水面積 $A_1 = 19 \text{ km}^2$ で既設ダムの 1/4 程度、有効貯水容量は、39.7 百万 m^3 で、そのうち利水容量 15.1 百万 m^3 、渇水対策容量 $V_1 = 16.6$ 百万 m^3 である。この程度のダムが建造されると、降雨流出条件が既設ダムと同じであるとすれば、この渇水対策容量で約 0.95 の信頼度、さらに利水容量も加えると約 0.98 の信頼度となる。

図 3.5, 3.6 は、図 3.4 の内容を灌漑期（図 3.5）、非灌漑期（図 3.6）に分けて示したものである。この二つを比較

¹ 通年の信頼度とは、表 3.2 で見たような各月の信頼度を平均したものである。

RELIABILITY-1 (1977+R.C.W.D.) YEARLY

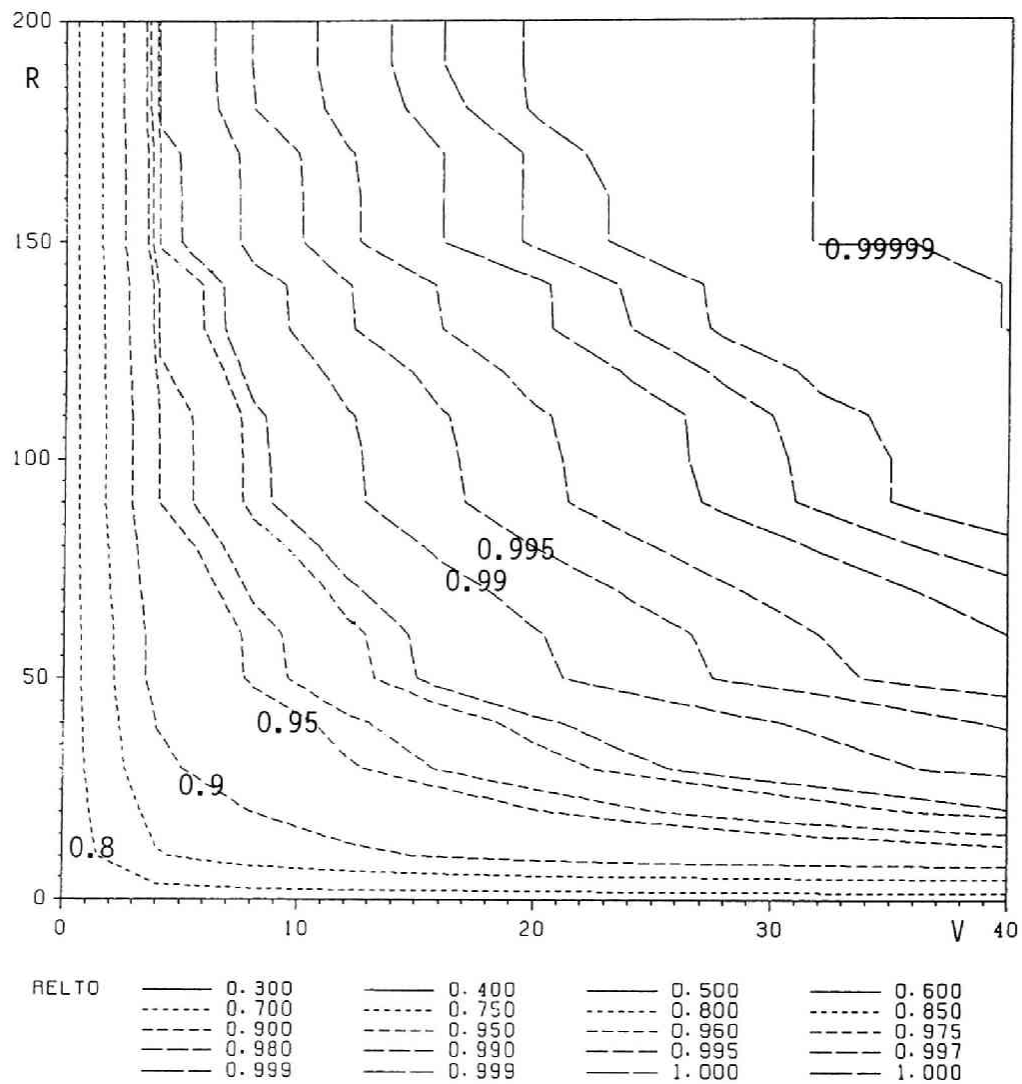


図 3.4: 昭和 52 年時の状態に渇水対策ダムを導入した場合の信頼度 α_1 (通年)

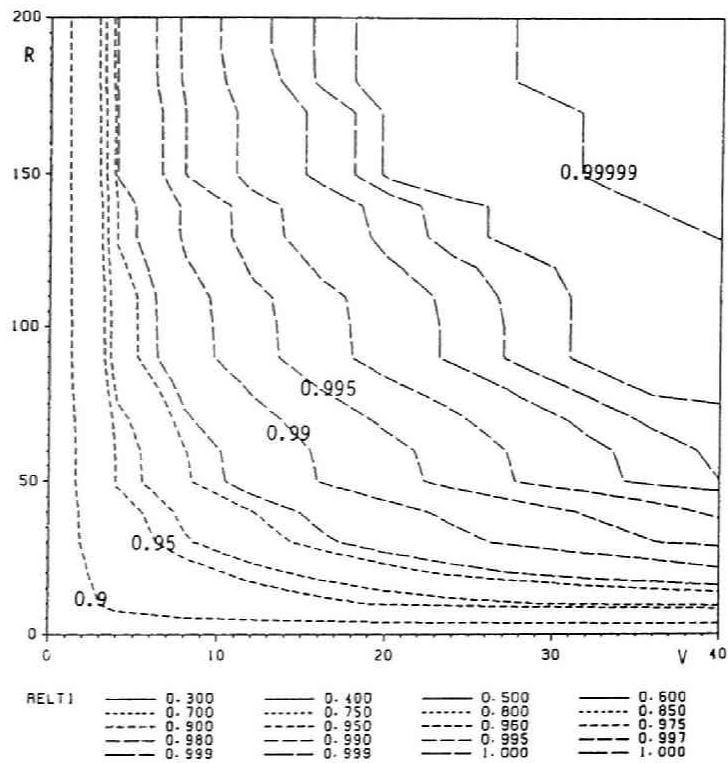


図 3.5: 昭和 52 年時の状態に渇水対策ダムを導入した場合の信頼度 α_1 [(a) 灌漑期]

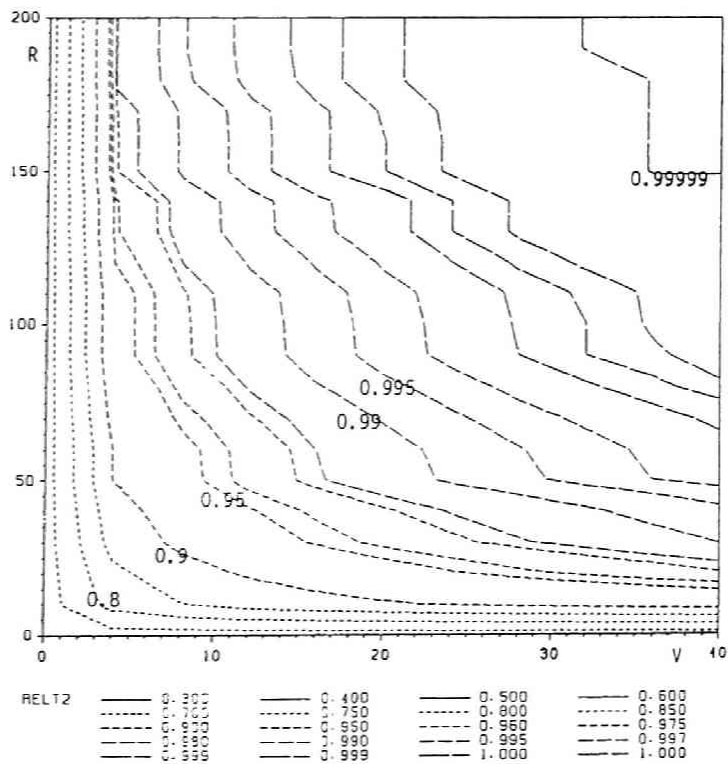


図 3.6: 昭和 52 年時の状態に渇水対策ダムを導入した場合の信頼度 α_1 [(b) 非灌漑期]

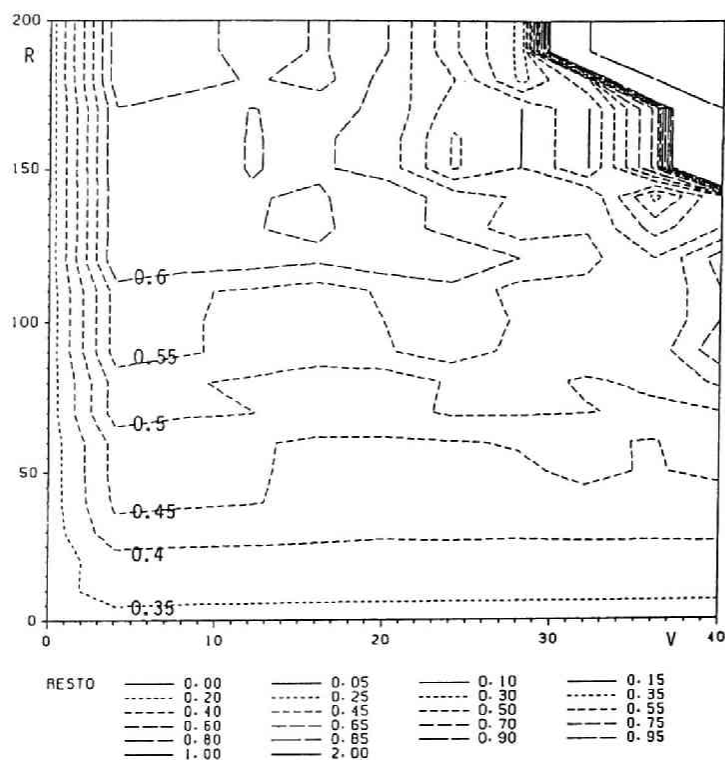


図 3.7: 昭和 52 年時の状態に渇水対策ダムを導入した場合の回復度 γ_1 (通年)

すると灌漑期の方が高い値となっている。前述のように、灌漑期は非灌漑期に比べて、需要も多いがそれを十分に補う流入量があることによる。

b) 回復度について

図 3.7 は、通年の回復度 γ_1 について、信頼度と同様に図示したものである。図で上方へ行くにつれて、回復度は概ね大きな値を取るようになる。これは、流入率が高いと流入量が大きくなり、水不足(需要を満たさないこと)に陥った際にも迅速に回復することを意味する。

図の中心より右上方では等高線がかなり入り組んでおり、流入量が(平均的に見て)大きいにも関わらず、回復度が 0.5 以下になる部分さえ現れる。容量・流入量が多いと水不足に陥る頻度が少なくなり、陥るときは余程ひどい渇水状況であるので回復しにくくなる。回復度は、(その月の回復回数)/(前月の水不足の回数)であり、分母も小さくなるがそれ以上に分子も小さくなり、結果として図 3.7 のような入り組んだところ、回復度が落ち込むところが出てくるのである。降雨流出の条件が同一という仮定のもとで、五ヶ山ダム程度の集水面積で 5 百万 m^3 程度以上の容量があれば、平均的にみて 0.4 程度の回復度が期待できる。

なお、灌漑期と非灌漑期の比較も行ったが、信頼度の場合と同様、灌漑期の方が総じて若干大きな回復度の値を示した。

c) 深刻度について

図 3.8 には、通年の深刻度 $\nu(1.0)$ を示した。図で右上方へ行くにしたがって深刻度は減少し 0 へと近づいていく。容量・流入量の大きな渇水対策ダムを導入すると深刻な被害を受けにくくなる。降雨流出の条件が同一という仮定のもとで、五ヶ山ダム程度の規模であれば、渇水対策容量だけ考えれば $\nu(1.0)$ は 0.02 から 0.03 の間、利水容量まで含めれば 0.01 から 0.02 の間の深刻度となる。すなわち、平均的にみてそれぞれ 2 ~ 3%, 1 ~ 2% の不足である(単純計算すると年間 700 ~ 1000 % 日, 400 ~ 700% 日に相当する)。なお、灌漑期と非灌漑期との比較は、これまでと同様の結果であり、灌漑期の方が深刻度は平均的にみて小さい。もちろん、生じた個々の渇水状態(水不足)についてみると灌漑期の方が深刻な被害を受けるが、その頻度が非灌漑期に比べて小さいので、相対的に平均的な意味で深刻度が小さいと言えるのである。

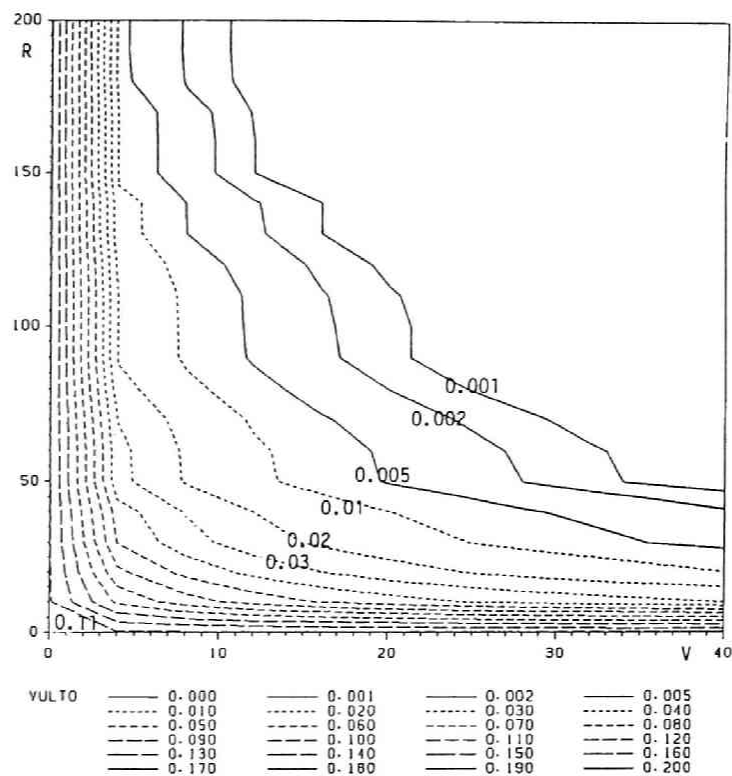


図 3.8: 昭和 52 年時の状態に渇水対策ダムを導入した場合の深刻度 $\nu(1.0)$ (通年)

表 3.3: 福岡市域の給水人口と需要量 [蒲池 (1988)]

	昭和 52 年 (1977)	昭和 54 年 (1979)	昭和 62 年 (1987)
給水人口 (人)	973,000	1,042,000	1,173,000
1 日最大需要量 (千 m^3)	443	409	434
年間給水量 (千 m^3)	130,300	122,700	134,300
1 人 1 日平均給水量 (ℓ)	367	323	313

(注) 給水人口は、各年 10 月 1 日現在

深刻度 $\nu(2.0)$ についても同様のことが言える。

d) まとめ

渇水対策ダムの候補地点の流出特性と集水面積により流入率 r が決まるので、このような図によって、所定の安全度を得るために必要な渇水対策ダムの容量が推定できる。

3.5 将来の水需要の増加を考慮した場合の渇水対策ダムの効果について

3.5.1 利水システムの現況 — 昭和 62 年 (1987 年) における安全度評価

53 年渇水以後今日までの 10 年余りの間に、福岡市では種々の渇水対策が講じられてきた (たとえば、上田 (1983), 蒲池 (1988))。特に、節水施策の推進により流域全体の各階層における節水がかなりの程度定着したので、給水人口が 20 万人増加したにも関わらず、水需要量はほぼ横ばいとなっている (表 3.3)。ただし、水利用の効率化・節水の推進は、流域が“渇水前の‘雑巾をほとんど絞り込んでいない状態’から‘雑巾を相当絞り込んだ状態’に変わってきている” (蒲池 (1988)) と言えるので、水需要は硬直化し弾力性を失ってきていることに留意しなければならない。また、昭和 58 年の筑後大堰の完成に伴う筑後川からの広域利水により、水供給が大幅に改善された。表 3.4 に

表 3.4: 昭和 62 年度取水状況

		取水量 (万 m ³ /日)	施設能力 (万 m ³ /日)
筑後川	江川ダム	5.8 (15.8%)	9.35 (14.4%)
	筑後大堰	9.6 (26.2%)	11.80 (18.1%)
	小計	15.4 (42.0%)	21.15 (32.5%)
域内 4 河川		21.3 (58.0%)	44.00 (67.5%)
計		36.7 (100.0%)	65.15 (100.0%)

表 3.5: ダムに対する月別水需要量

	昭和 52 年 (1977)	昭和 62 年 (1987)	平成 13 年 (2001)
1 月	6	4	6
2 月	6	4	6
3 月	7	5	7
4 月	7	5	7
5 月	7	5	7
6 月	7	5	7
7 月	8	6	9
8 月	8	6	9
9 月	8	6	8
10 月	7	5	8
11 月	7	5	7
12 月	7	5	7

示すように、従来の取水（江川ダムおよび域内 4 河川）の 1/3 強の取水が可能となり、合計の 1/4 を占めることとなった。

これらのことを勘案して、昭和 62 年（1987 年）時点での利水安全度を評価してみよう。この広域利水によってもたらされる水量が、既設の貯水池からの取水を軽減するとして、やや大胆な仮定ではあるが、既設の貯水池に対する水需要を一律に減じることとする。筑後大堰からの取水量は表 3.4 より、

$$9.6(\text{万 m}^3/\text{日}) \times 30(\text{日}) = 2.88(\text{百万 m}^3/\text{月}) \quad (3.1)$$

である。このすべてが既設ダムへの依存量の補填のために使われるのではないので、また、百万 m³単位の計算を行うので、ここではとりあえず 2 百万 m³を毎月の水需要量から一律に差し引く。差し引く量が若干多めの見積りであるかも知れないが、その多い分は硬直した水需要の弾力性を取り戻す効果として理解しておくことにしよう。

結局、昭和 62 年時点の既設ダムに対する水需要は、表 3.5 のようになる。この条件のもとで、各月の利水安全度指標を求めた結果を表 3.6 に示す。

昭和 53 年時点の結果（表 3.2）と比べると非常に興味深い。信頼度は非常に改善されて、通年で 0.97 を超える高い値となっている。特に、灌漑期直前の 3 か月の間ずっと 0.7 を下回っていたのが 0.96 以上に改善され、年間を通じてほぼ一定の信頼度となっている。回復度は、通年で 0.444 となり 4 割近く改善された。特に、灌漑期以外で回復度が低かった月がほぼ 2 倍程度になった。また、深刻度は、全期間通じてすべて 1/10 となっている。

すなわち、最近 10 年間の行政および住民の努力は大変な効果を生み、流域の利水条件を著しく向上させたと言える。

3.5.2 2001 年の水需要予測に基づく安全度評価

福岡市では、来るべき 21 世紀へ向けて、2001 年を目標年次とする第 6 次福岡市基本計画を策定している。表 3.7 は、同計画による 2001 年（昭和 76 年すなわち平成 13 年）の水需給計画の表である（福岡市総務局（1988））。こ

表 3.6: 渇水対策ダムをもたない場合 (昭和 62 年) の利水安全度指標の値

	信頼度 α_1	回復度 γ_1	深刻度 $\nu(1.0)$	深刻度 $\nu(2.0)$
1 月	0.9762	0.4073	0.0102	0.0052
2 月	0.9749	0.3655	0.0111	0.0059
3 月	0.9653	0.2709	0.0165	0.0095
4 月	0.9714	0.5072	0.0126	0.0070
5 月	0.9641	0.3951	0.0178	0.0107
6 月	0.9867	0.7772	0.0063	0.0035
7 月	0.9895	0.6090	0.0049	0.0029
8 月	0.9822	0.2571	0.0095	0.0063
9 月	0.9883	0.6180	0.0051	0.0028
10 月	0.9860	0.3932	0.0074	0.0046
11 月	0.9792	0.2071	0.0108	0.0067
12 月	0.9725	0.2115	0.0129	0.0072
通年	0.9780	0.4444	0.0104	0.0060
灌漑期	0.9867	0.6413	0.0065	0.0039
非灌漑期	0.9737	0.3625	0.0124	0.0071

表 3.7: 福岡市需要計画表

区分		1986 年	2001 年	
総人口 (千人)		1,176	1,445	
給水人口 (千人)		1,158	1,411	
一日平均需要量 (m ³ / 日)		357,583	488,000	
一日最大需要量 (m ³ / 日)		434,600	610,000	
目標施設能力 (m ³ / 日)		—	763,000	
施設 計 画	現有施設 (m ³ / 日)		651,500	651,500
	現計画	合所ダム (m ³ / 日)	—	21,800
		多々良川開発 (m ³ / 日)	—	74,800
	将来計画 (m ³ / 日)		—	14,900
	計 (m ³ / 日)		651,500	763,000

(注) 人口は 10 月 1 日現在

表 3.8: 信頼度 α_1

α_1	昭和 52 年 (1977)	昭和 62 年 (1987)	平成 13 年 (2001)
1 月	0.743	0.976	0.700
2 月	0.703	0.975	0.658
3 月	0.636	0.965	0.597
4 月	0.684	0.971	0.661
5 月	0.636	0.964	0.618
6 月	0.855	0.987	0.849
7 月	0.887	0.990	0.862
8 月	0.832	0.982	0.790
9 月	0.892	0.988	0.872
10 月	0.861	0.986	0.820
11 月	0.803	0.979	0.758
12 月	0.750	0.973	0.701
通年	0.774	0.978	0.741
灌漑期	0.867	0.987	0.844
非灌漑期	0.727	0.974	0.689

れによれば、一日平均需要量は、昭和 61 年に比べて約 1.4 倍になっている。そこで、各月の既設ダムに対する需要も同程度の伸びをすると仮定して、表 3.5 のように設定した。

これまでと同様にして、この条件のもとでの利水安全度指標を求め、昭和 53 年、昭和 62 年のものとも比較し易いように整理したのが、表 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 である。なお、深刻度 (表 3.10, 3.11) については百分率で表示し直した。

この水需要予測のもとでは、昭和 53 年当時よりも相対的な需要が増えることになる (表 3.5 に示されるように、7, 8, 10 月に百万 m^3 ずつ多くなる) ので、利水安全度が当時より若干悪くなるのである。いままで見てきたように、当時の利水システムは非常に貧弱であったが、それよりもまだ少し悪い状況が予想されるのであり、何らかの抜本的な対策が必要とされる。こうした事情から、上記の五ヶ山ダムのような渇水対策ダムが建設採択となったのはまさに時宜を得たものと言えよう。

3.5.3 渇水対策ダム導入の効果について —2001 年の場合

上記の 2001 年の需要予測のもとで、渇水対策ダムを導入したら利水安全度はどうなるかを調べた。

a) 信頼度について

図 3.9 に、渇水対策ダムの規模と通年の信頼度 α_1 の関係を示した。図が示す傾向は図 3.4 と同じであるが、図 3.4 と比べると、等高線が全体的に右上方へ移動している。すなわち、全体として信頼度が図 3.4 の状況よりは低下する。既設ダムの集水面積 (77km^2) の $1/10$ から $1/2$ 程度の集水面積をもつような渇水対策ダムを導入する場合、降雨流出条件が同一という仮定のもとで、0.9 の信頼度を得るのに、図 3.4 と比べて約 2 百万 m^3 余計に容量が必要であることがわかる。図 3.10, 3.11 は、それぞれ灌漑期、非灌漑期の信頼度を示したものである。灌漑期の信頼度 0.95 の等高線と、非灌漑期の 0.9 の等高線とがほぼ同じ位置にある。非灌漑期でも期間中ずっと 0.9 の信頼度を維持しようとするれば、図 3.9 で見た通年の場合よりも、さらに約 2 百万 m^3 余計に容量が必要であることがわかる (ただし、すぐ上で述べたような集水面積のダムの場合)。このとき、灌漑期では 0.95 の信頼度が期待できる。

b) 回復度について

図 3.12 は、回復度 γ_1 を示したものである。等高線が入り組んでいる部分は、図 3.7 と同じ理由による。降雨流出条件が同一だとして、集水面積が既設ダムの $1/2$ 程度以下のとき、貯水容量が 4 百万 m^3 以上であれば、それ以上いくら貯水容量を増やしても回復度は良くならない。

表 3.9: 回復度 γ_1

α_1	昭和 52 年 (1977)	昭和 62 年 (1987)	平成 13 年 (2001)
1 月	0.214	0.407	0.216
2 月	0.175	0.366	0.178
3 月	0.169	0.271	0.174
4 月	0.360	0.507	0.360
5 月	0.252	0.395	0.253
6 月	0.704	0.777	0.703
7 月	0.545	0.609	0.497
8 月	0.216	0.257	0.197
9 月	0.571	0.618	0.566
10 月	0.241	0.393	0.189
11 月	0.091	0.207	0.097
12 月	0.114	0.212	0.121
通年	0.322	0.444	0.311
灌漑期	0.577	0.641	0.556
非灌漑期	0.218	0.363	0.215

表 3.10: 深刻度 $\nu(1.0)$

$\nu(1.0)$	昭和 52 年 (1977)	昭和 62 年 (1987)	平成 13 年 (2001)
1 月	11.9	1.0	13.9
2 月	13.9	1.1	15.9
3 月	18.5	1.7	20.6
4 月	14.5	1.3	15.7
5 月	18.9	1.8	19.9
6 月	6.3	0.6	6.6
7 月	5.1	0.5	6.3
8 月	9.2	1.0	11.6
9 月	4.7	0.5	5.7
10 月	7.2	0.7	9.5
11 月	10.4	1.1	12.8
12 月	12.6	1.3	15.0
通年	11.1	1.0	12.8
灌漑期	6.3	0.7	7.5
非灌漑期	13.5	1.2	15.4

(% 表示)

表 3.11: 深刻度 $\nu(2.0)$

$\nu(2.0)$	昭和 52 年 (1977)	昭和 62 年 (1987)	平成 13 年 (2001)
1 月	658	52	762
2 月	777	59	887
3 月	1127	95	1256
4 月	822	70	884
5 月	1196	107	1257
6 月	355	35	369
7 月	298	29	366
8 月	614	63	787
9 月	265	28	320
10 月	458	46	615
11 月	657	67	807
12 月	747	72	891
通年	664	60	767
灌漑期	383	39	460
非灌漑期	805	71	920

((%)²表示)

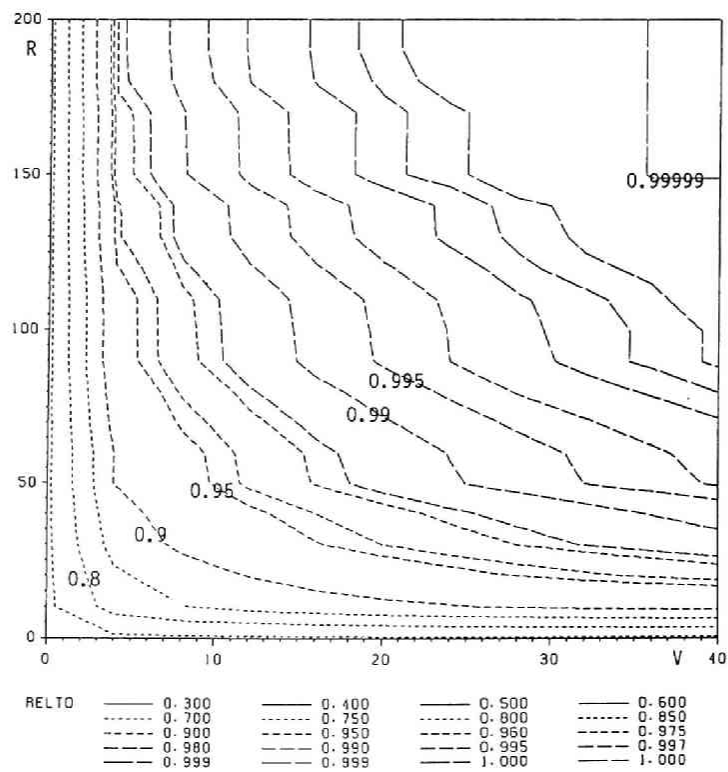


図 3.9: 2001 年の信頼度 α_1 (通年)

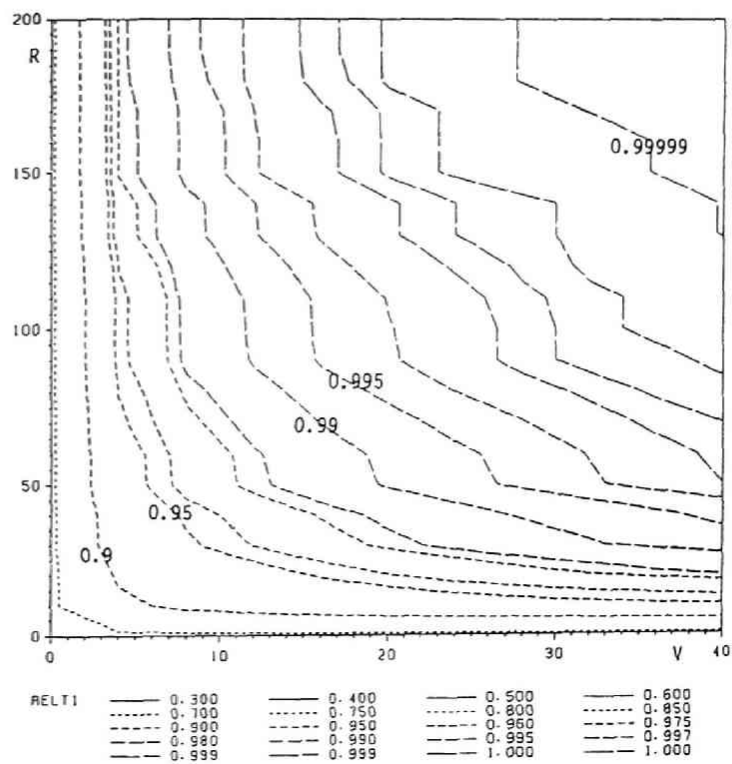


図 3.10: 2001 年の信頼度 α_1 [(a) 灌漑期]

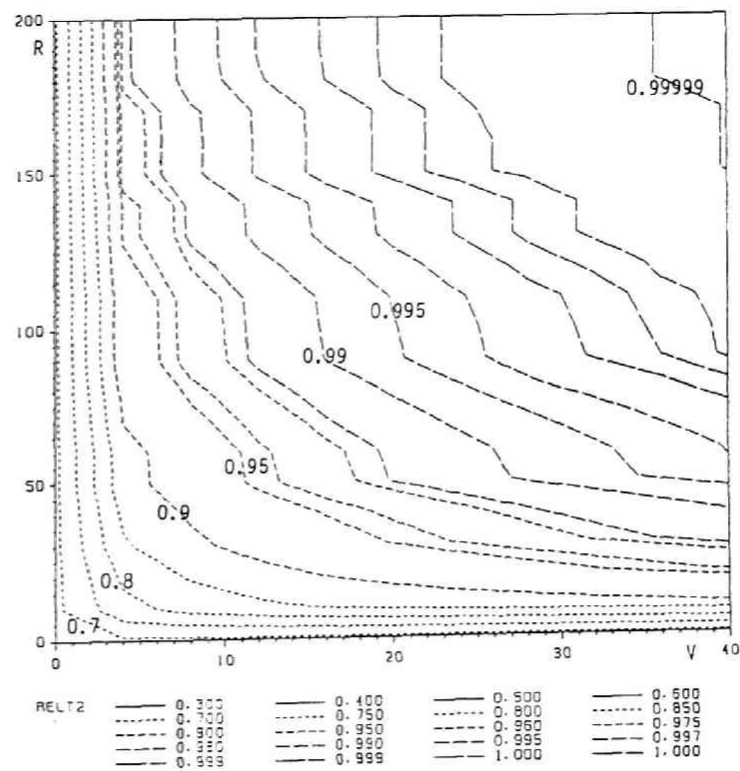


図 3.11: 2001 年の信頼度 α_1 [(b) 非灌漑期]

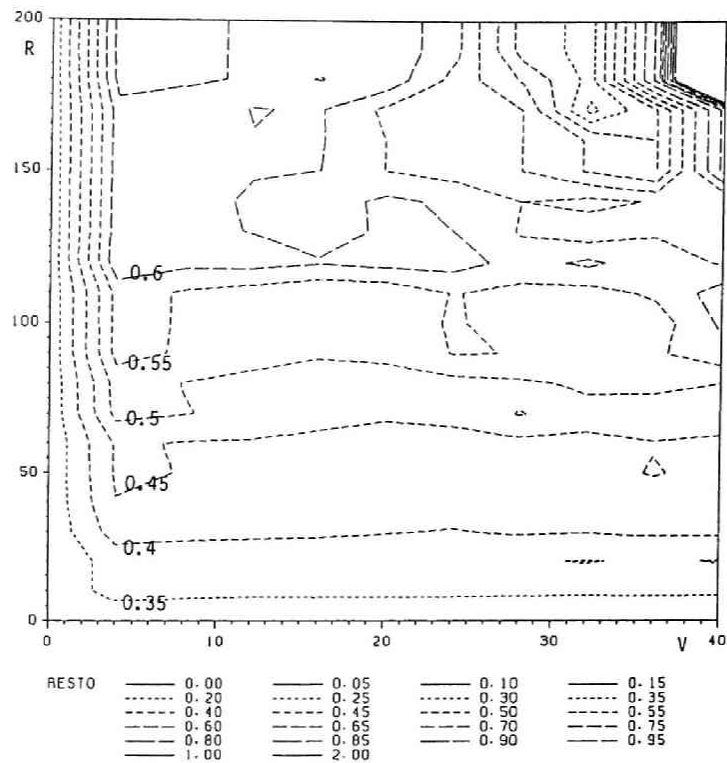


図 3.12: 2001 年の回復度 γ_1 (通年)

c) 深刻度について

深刻度 $\nu(1.0)$ を図 3.13 に示す。右上方に行くにつれて深刻度は小さくなる。全体的な形状は信頼度の図 3.9 と似ており、図 3.9 で信頼度 0.9 の等高線は、深刻度 6 ~ 7% の等高線とはほぼ同じ位置にある。また、信頼度 0.95 が深刻度 2 ~ 3% に、信頼度 0.975 が深刻度 1% にほぼ対応する。昭和 62 年時点のように、年間通じて 1% 程度の深刻度を維持しようとすれば、既設ダムと同じ集水面積をもつならば約半分 (10 百万 m^3) の容量が、既設ダムと同じ容量をもつとすれば 約半分の集水面積が必要であることなどが読み取れる。

3.5.4 五ヶ山ダムについて

これまで何度か言及してきた五ヶ山ダムについてもう少し詳しく見ておこう。図 3.2 に示したように、渇水対策容量は 16.6 百万 m^3 、利水容量は 15.1 百万 m^3 である。これらの容量について、次の二つの考え方をとる。

考え方 (1) この利水容量は、2001 年時点の安全度を 1/10 にし、かつ、硬直化した水需要の弾力性をいくらかでも取り戻すという効果に転化され、実質の容量増とはみなさないという考え方である。このとき、実質の容量増は、渇水対策容量の分だけである。

考え方 (2) ここで考えている運用方法 (上述の“ケース 5”) の場合、既設ダムの容量と渇水対策ダムの容量の区別はしなくてよい (前述) ので、両者を合わせた 31.7 百万 m^3 が実質の容量増と考える。

これまでに示してきた等高線の図では、標本点を離散的にとり安全度指標の評価値を求めてきた。そこで、五ヶ山ダムの条件に近い標本点の評価値により、月別の安全度がどのようになるのか調べてみた。

五ヶ山ダムの集水面積は 19 km^2 であり、既設ダム (77 km^2) の約 25% である。これに近い流入率の標本点の値として $r = 0.30$ (30%) を採用する。また、上記の考え方 (1) に近い容量の標本点として $V_1 = 16$ を、考え方 (2) に対しては $V_1 = 32$ を採用することにする。なお、降雨流出の条件は既設ダムのそれと同一であると仮定する。

表 3.12 は、これらについて信頼度と回復度を月別に示したものである。考え方 (1) の場合、信頼度は 0.95 程度になる。前項 c) の考察から、深刻度はおよそ 2 ~ 3% と推定できる。表 3.8 と比べると、昭和 62 年ほどの高い信頼度ではないが、0.9 をはるかに超えており、渇水対策としてかなり有効であると言える。考え方 (2) によれば、

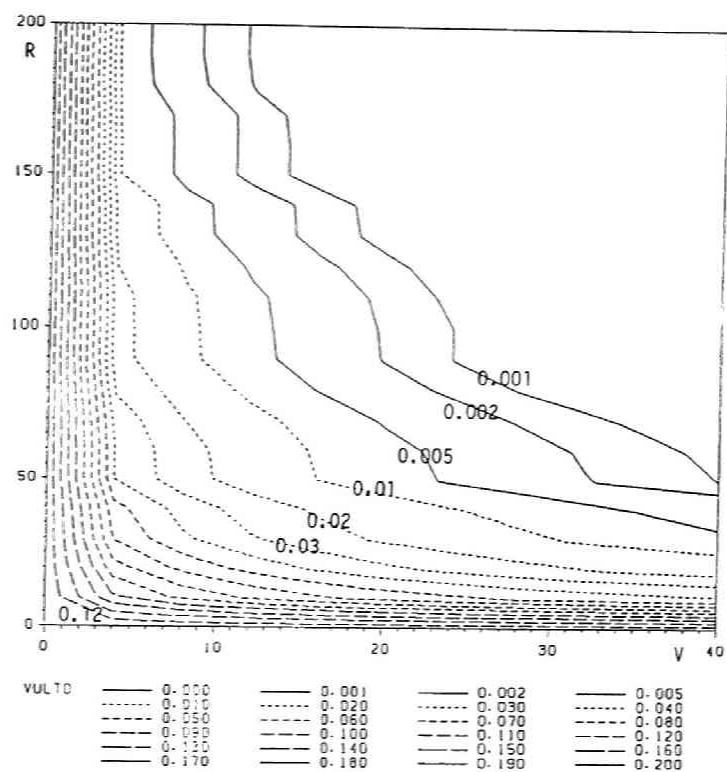


図 3.13: 2001 年の深刻度 $\nu(1.0)$ (通年)

表 3.12: 五ヶ山ダムを導入した場合の信頼度・回復度

	$V_1 = 16 \text{ 百万 m}^3, r = 0.3$		$V_1 = 32 \text{ 百万 m}^3, r = 0.3$	
	信頼度	回復度	信頼度	回復度
1 月	0.936	0.269	0.974	0.298
2 月	0.932	0.251	0.972	0.249
3 月	0.922	0.308	0.969	0.275
4 月	0.939	0.505	0.976	0.492
5 月	0.923	0.377	0.973	0.365
6 月	0.975	0.794	0.991	0.796
7 月	0.976	0.599	0.992	0.590
8 月	0.953	0.241	0.984	0.193
9 月	0.976	0.672	0.991	0.628
10 月	0.962	0.266	0.986	0.258
11 月	0.949	0.219	0.982	0.293
12 月	0.938	0.226	0.976	0.227
通年	0.949	0.414	0.980	0.403
灌漑期	0.970	0.657	0.989	0.638
非灌漑期	0.938	0.319	0.976	0.321

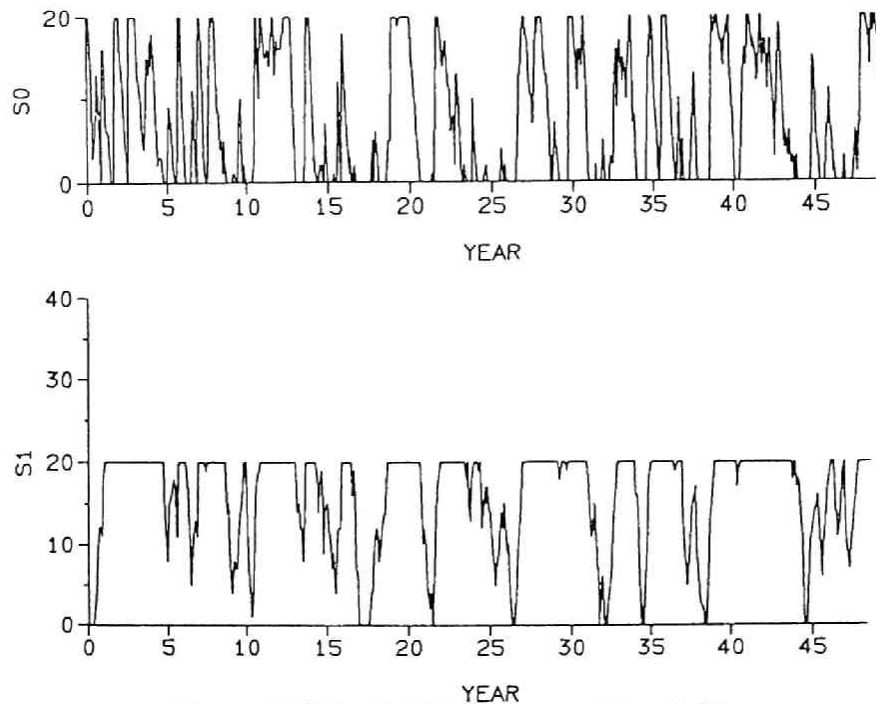


図 3.14: 貯水量の変化 ($V_1 = 20$, $r = 0.3$ の場合)

信頼度は 0.98 程度になり、推定される深刻度は約 1% となる。この考え方に立てば、昭和 62 年と同等の安全度が維持できることとなる。いずれにせよ、年間を通じて安定した高い安全度が得られる。回復度についても昭和 62 年と同程度の結果である。

流入率 30% のとき (五ヶ山ダムと同じ条件) に、ケース 5 の運用を行った場合の既設ダム、渇水対策ダムの貯水量の推移の様子を 10,000 年のシミュレーションのうちの最初の 50 年間について見たのが図 3.14 と 図 3.15 である。それぞれ、渇水対策ダムの容量が 20 および 40 百万 m^3 の場合を示している。渇水対策ダムの容量が 40 百万 m^3 あったとしても満杯となることが多く、無効放流となる流量がまだ十分存在することを示している。17 年目くらいに渇水対策ダムが空になるような渇水が生起しており、このときには需要を満たさない月が発生していると思われるが、その時期の 図 3.14 と 図 3.15 を比べるとわかるように、容量がもっとあればこのような場合でも需要を満たすことができたはずである。もちろん、容量の問題はダム候補地点の地形的条件に制約されるので、五ヶ山ダムにこれ以上の容量を期待するのは無理ではあるが、他のダムを築造すれば容量の拡大ができる。しかし、このような渇水はごく希少な事例であり、これまで見てきたように、この五ヶ山ダムは 2001 年の水需要予測に十分耐え得る性能を備えていると言えるのではなかろうか。

3.6 結 語

渇水対策ダムの導入が、利水システムの安全度の向上にどのように寄与するか調べた。流入率と容量と利水安全度指標の関係を示す図 (図 3.4, 3.7, 3.8 など) は、想定する渇水対策ダムの容量決定、それを含むトータルとしての利水システムの安全度評価などの解析に非常に有用である。

福岡市域をケーススタディとして、昭和 53 年、昭和 62 年、平成 13 年のそれぞれの時点における利水安全度の評価を行うとともに、渇水対策ダム導入の効果を明らかにした。現在計画中の五ヶ山ダムについても概略の評価を行い、その有効性が検証された。

既設ダムと渇水対策ダムの相互的な運用方法については、ここでは単一の既設ダムに対するごく単純なケースを想定したが、複数既設ダムのそれぞれの節水運用を考えるケースなどさらに複雑な問題が今後の課題として残されている。

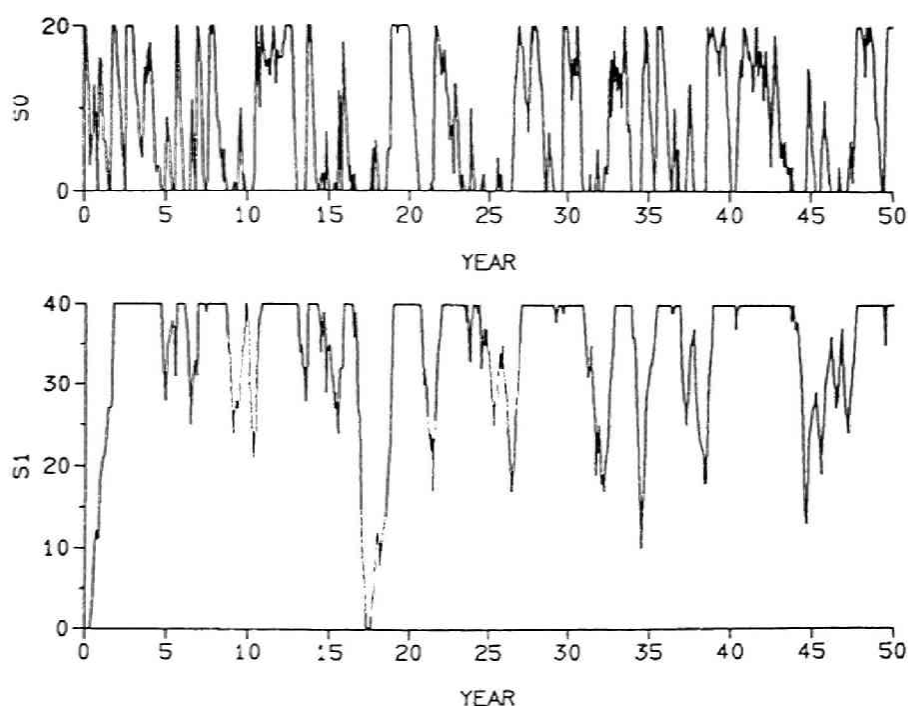


図 3.15: 貯水量の変化 ($V_1 = 40$, $r = 0.3$ の場合)

参 考 文 献

福岡市総務局 (1988): 福岡市基本計画, pp.73-75.

蒲池米司 (1988): 福岡市の水事情と“渇水対策ダム”への期待, 河川, No. 504, pp. 42-48.

建設省河川局 (編) (1978): 昭和 65 年にむけての水資源計画と水利用, 日本河川協会, 67pp.

建設省河川局河川計画課・建設省土木研究所 (1986): 渇水時における水供給施設の最適運転手法に関する研究, 第 40 回建設省技術研究会報告, pp. 544-593.

中安正晃・松下越夫 (1984): 水資源開発計画におけるダムの位置特性に関する一考察, 土木技術資料, 26-11, pp. 27-616.

高棹琢馬・宝 馨・丸川幸治 (1989): 渇水対策ダムの導入が利水安全度に及ぼす効果に関する基礎的研究, 水文・水資源学会 1989 年研究発表会要旨集, pp. 75-78.

上田年比古 (1983): 福岡市の昭和 53 年大渇水後の水対策, 水資源研究センター研究報告, 京都大学防災研究所, 第 3 号, pp. 3-13.

結 論

結 論

本論文では、水資源システムにおいて重要な三つの課題を取り上げた。すなわち、水文頻度解析、洪水流出の解析とリアルタイム予測、利水システムの信頼性評価である。これらはすべてシステムに本質的に内在する不確定性を無視できないものであり、通常その不確定性を取り扱うのに確率論的なモデルと手法を用いる。本論文は、水資源システムの分析・同定・予測といった問題に用いられる基本的な確率論的モデルと手法の評価を行うための客観的な規準・手順を、水文学・水資源工学の立場から提示し検証したものである。

上の三つの課題に関しては、水文学・水資源工学の分野において、これまでに数々の成果が収められてきており、科学的には現象の解明、工学的には人間社会の福利の向上・災害防止といった点で大いに貢献してきたことは著者が言うまでもないことである。

ただ、これらが水資源システムの主要な課題であるが故に、多数の研究者や実務家がそれぞれの課題についてそれぞれ多種多様なモデルなり手法なりを提示してきたのではあるが、それらのうちの少なからぬ数のものが必ずしも十分に吟味・整理されないまま、いわば混沌とした状態として残されてしまっていると言えるのではなかろうか、というのが著者の感想であり、あえて本論文でこれらの課題を取り上げたのである。すなわち、そういう混沌とした状態であるならば、現代的な方法を駆使して、従来のモデルや手法をなるべく客観的な規準で整理整頓し諸問題を明らかにして、また、新たな考え方を提示して、将来の発展に貢献できはしないか、というのが本論文の趣旨である。もとより、浅学非才であり、水資源システムという対象も巨大であるので、はたして、これまで述べてきた内容がこの目的をいくらかでも果たし得たのかどうか心許ないが、諸賢の御批判を仰げれば幸いである。

以下に、本論文の内容、得られた成果を要約しておこう。

序論は、3編からなる本論文の導入部分であり、水文学・水資源工学・水資源システムの概要を述べ、この分野で用いられてきた確率論的手法とシステム分析の歴史を概観した。また、“確率論的”、“確率統計的”という言葉にあてはめられる random, probabilistic, statistical, stochastic などの言葉の違いを述べ、著者の確率論的アプローチの基本的姿勢を明らかにした。

第1編は、水文統計解析における母数推定法と確率分布モデルの評価について論じたものである。

まず、第1章では、水文頻度解析の意義とその問題点を明らかにして著者の基本的立場を述べ、琵琶湖流域の水文データについてコンピュータとグラフィック・ディスプレイを援用して基本的な2母数の分布をあてはめる客観的かつ簡便な手法を例示して、問題の提起を行った。第2章では、極値水文量の頻度解析によく用いられる3母数対数正規分布、Gumbel分布、一般化極値分布について種々提案されている母数推定法の優劣を、標本の大きさ(データ数)とも関連づけながら、Monte Carlo シミュレーションにより明らかにした。3母数対数正規分布には早い時期から多数の母数推定法が提案されており、色々な分野での実務に多用されているが、特にわが国で慣用されてきたいくつかの手法の特徴を明らかにすることができた。第3章では、現在頻度解析に使われている、あるいは最近提案されまだ十分検証の済んでいない、ほとんどあらゆる種類の2ないし3母数の確率分布モデルを候補として、それらを実際の極値水文データに当てはめ、まず、適合度の客観的な評価規準(標準最小二乗規準 SLSC, 最大対数尤度 MLL, 情報量規準 AIC, 相関係数 COR)を用いて、それらのモデルの適合度を明らかにした。この場合、同程度の適合度を示すモデルが複数個あり、また、規準ごとに最適とみなされるものが異なることが例示された。次に、これらの中からデータごとに適合度の劣るものを除外し、再現確率統計量(確率水文量)の変動性を jackknife 法や bootstrap 法と呼ばれるリサンプリング手法を用いて評価し、この変動の小さいモデルを採用すべきであるというシステムティックなモデル評価の手順を提案した。従来、確率分布形の最終的な選択の問題は必ずしも明快な規準がなく曖昧な形で処理されることが多かったが、本論文で提示した手法によりこの点が明確化されたものと考えられる。

第2編は、流出モデルの同定と評価および Kalman フィルタ理論を応用したリアルタイムでの洪水予測手法について論じたものである。

第1章では、水資源システムにおける降雨流出解析・予測など種々の分析の基本となる流出モデルを構築する際の基本的考え方、モデルの同定手法とモデル評価の規準について述べ、著者の立場を明らかにした。第2章では、流出モデルの stochastic な観点からの評価法について述べたのち、kinematic wave モデルを基本として、それを簡略化した形式のモデルの評価問題を取り上げて、斜面系および斜面-河道系の表面流出モデル、斜面系の表面流・中間流モデルへの適用例を示した。第3章では、流出モデルを stochastic な非線形状態空間型モデルで記述し、Kalman フィルタ理論を非線形連続-離散システムに応用する一般的な方法を提示した。特に、システム方程式、観測方程式に導入するノイズ項の非正常性を考慮することが、流量予測精度を適切に見積る上で重要であること

を示した。また、小流域(単一入力単一出力(SISO)系)のみならず、広い流域で降雨の空間分布を考慮する必要があり、多地点での流量観測がある場合(多入力多出力(MIMO)系)にも適用して、この手法の有効性を検証した。

第3編は、水資源システムの性能評価の規準と手法について、特に利水システムの運用方法の評価、渇水対策について論じたものである。

第1章では、水資源システムの計画と管理へのシステム論的アプローチの必要性、水資源システムの性能評価の手法と規準について述べ、システムの安全性・信頼性の評価規準を示した。第2章では、まず、利水用貯水池の年間の運用計画(操作ルール)を最適化する問題によく用いられる確率DPにおいて、採用すべき評価関数としてどのようなものが望ましいかをシミュレーション・スタディにより明らかにした。次に、想定される渇水の期間・規模に応じた渇水時用の操作ルールを確率DPで求めておき、渇水が予想されるとき、あるいは既に渇水に陥ってしまったときに、この渇水時用のルールに切り替えて被害を軽減する方式を提案し、その効果を計量した。これらの手法を評価する際に、システム性能評価の規準が有効であることを示した。第3章では、近年頻発する渇水に対するハードな対策としてこれから実現されつつある渇水対策ダムについて検討した。すなわち、当該流域に渇水対策ダムを導入した場合に、トータルとしての利水システムの安全度がどの程度向上するのかを定量的に評価した。

以上を要するに、著者は、水資源システムにおける確率論的アプローチの重要性と有用性を強く認識し、これまでの水文学・水資源工学において得られてきた成果を十分踏まえながら、種々の確率論的モデルと手法を取り上げ、なるべく客観的な立場からそれらの評価を試みたのである。水資源システムにおける問題はまさに多種多様、複雑多岐多階層にわたっており、本論文で取り扱った課題はその一部にすぎない。その一方で、現代の科学技術の進歩のスピードは著しく速くなり、結果として、これまで不可能であった手法やその検証がかなりの程度実行可能となった。よって、多様化し複雑化する水資源システムの諸問題ではあるが、その解決の展望が全く暗澹たるものでもないように思われる。用いるモデルと手法の前提・仮定を明確に定義し、水文学・水資源工学的立場からなるべく客観的な規準でその適用限界を、まず、個々の問題について明らかにしていくことが肝要であろう。本論文が、こうした点において、学問的・技術的發展にいくらかでも寄与することを信じて結びとしたい。

本研究を進めるにあたって、京都大学工学部高棹琢馬教授には、終始懇切な御指導御鞭撻を戴くとともに、あらゆる研究環境を整えて戴いたことに、心より御礼申し上げる次第である。京都大学防災研究所池淵周一教授には、適切な御指導御鞭撻とともに、特に研究会などでの御討議や日常での会話の中において示唆に富むアドバイスを戴いた。また、京都大学防災研究所石原安雄教授には、折りに触れて水文学・防災工学上の諸問題について御教示戴いた。ここに、厚く御礼申し上げる次第である。

京都大学工学部椎葉充晴助教授には、水文学はもとより、数学、数値解析などの分野での適切な御教示を戴くとともに、特に、彼の卓越したプログラミング技術による図形処理システムは著者の研究進行上の絶大なる支援となった。岐阜大学工学部小尻利治助教授には、彼が京都大学に御在任の折から適切な御教示を戴いた。また、京都大学防災研究所友杉邦雄助教授、下島栄一助手、中北英一助手、京都大学工学部堀智晴助手にも、色々な面で御教示・御助言戴いた。これらの方々にも厚く御礼申し上げたい。

また、いちいち御名前を挙げないが、京都大学工学部土木系教室ならびに防災研究所の諸先生方、さらに、土木学会水理委員会、特に水文部会のメンバーの諸先生方にも直接間接に種々御教示戴いた。京都大学工学部土木工学教室水工計画学研究室の学生諸君には、本研究のかかなりの部分で助力を得た。ここに厚く御礼申し上げる次第である。

